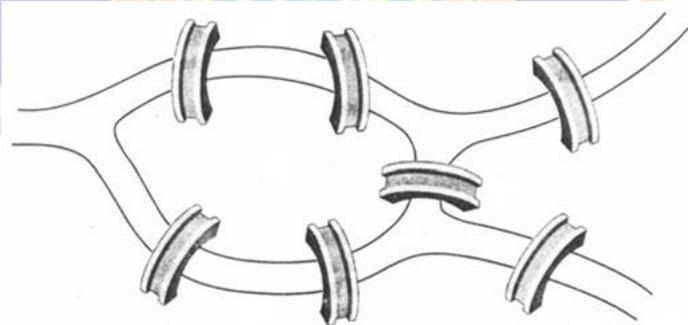


BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1736, Leonhard Euler dalam karya tulisnya yang berjudul *Solution problematis ad geometriam situs pertinenti* mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat wilayah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Königsberg, Rusia dalam sekali waktu. Dalam tulisannya, permasalahan mengenai jembatan Königsberg tersebut bisa dinyatakan dengan istilah graf dalam menentukan keempat wilayah itu menjadi titik (*vertex*) serta ketujuh jembatan menjadi sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik (*vertex*) yang sesuai. Penyelesaian permasalahan mengenai jembatan Königsberg ini menjadi salah satu bukti sejarah lainnya teori graf (Widyawati & Rahadjeng, 2014).



Gambar 1.1 Ilustrasi Jembatan Königsberg

Salah satu pembahasan yang terus berkembang dalam teori graf adalah pelabelan pada graf. Pelabelan graf adalah pemberian bilangan bulat ke titik atau sisi, atau keduanya, dengan syarat tertentu (Gallian, 2021). Objek penelitian ini adalah graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik (*vertex*) dan sisi (*edge*)

serta himpunan bagian dari bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack, kemudian dilanjutkan oleh Stewart, Kotzig, dan Rosa (Riskawati et al., 2019). Dalam perkembangannya, terdapat beberapa jenis pelabelan yang dikenal diantaranya yaitu pelabelan graceful, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan total, pelabelan harmonis, dan pelabelan harmonis ganjil (Maryana & Sugeng, 2021).

Salah satu pelabelan yang terkenal adalah pelabelan graceful yang diperkenalkan tahun 1967 oleh Rosa yang menyebut suatu fungsi f merupakan β -valuation dari graf G dengan sisi q jika f adalah fungsi injektif dari himpunan titik G ke himpunan $\{0,1,2,\dots,q\}$ sedemikian sehingga, untuk setiap sisi xy diberi label $|f(x)-f(y)|$, dengan label yang dihasilkan berbeda. Selanjutnya Columb menyebut pelabelan tersebut sebagai pelabelan graceful dan populer sampai sekarang (Gallian, 2021).

Dalam beberapa tahun terakhir, telah banyak kajian mengenai pelabelan graceful, diantaranya Maryana & Sugeng telah membuktikan bahwa *Thorny-Snake Graphs* memiliki pelabelan graceful (Maryana & Sugeng, 2021), Pattabiraman dkk telah mengkaji membuktikan bahwa *Hexagonal Snakes* memiliki pelabelan graceful (Pattabiraman et al., 2019), Nurvazly & Sugeng telah membuktikan bahwa *Edge Amalgamation of Cycle Graph* mempunyai pelabelan graceful (Nurvazly & Sugeng, 2018), Kaneria dkk telah membuktikan bahwa *Cycle of Graphs* dapat dilabeli dengan pelabelan graceful (Kaneria et al., 2014).

Berdasarkan hasil survei dinamis yang dilakukan Gallian dalam jurnalnya yang berjudul “*A Dynamic Survey of Graph Labeling*” yang mencakup penelitian tentang pelabelan graf dari berbagai belahan dunia, diperoleh bahwa penelitian

mengenai pelabelan graceful pada beberapa jenis graf masih sangat minim dilakukan sehingga masih sangat terbuka untuk dilakukan kajian lebih lanjut terkait hal tersebut. Dalam survei yang dilakukan oleh Gallian, Barrientos dalam tulisannya yang berjudul *Graceful labelings of chain and corona graphs* (2002) dan *On graceful chain graphs* (2009) telah mengkonstruksi dan mendefinisikan beberapa graf rantai serta membuktikan bahwa graf tersebut memiliki pelabelan graceful. Lebih lanjut Badr dalam tulisannya yang berjudul “*On Graceful Labeling of the Generalization of Cyclic Snakes*” telah mengkonstruksi dan membuktikan bahwa graf $(1,k)C_4$ -snake, $(2,k)C_4$ -snake, $(1,k)C_8$ -snake dan $(2,k)C_8$ -snake memiliki pelabelan graceful (Badr, 2015).

Dalam beberapa tahun terakhir muncul beberapa konstruksi dari variasi graf rantai, diantaranya: kDL_m -path, $C[K_4^{(k)}, DL_m, K_4^{(n)}]$, dan kC_4 -path (Gede & Adiwijaya, 2017), n -Uniform Cactus Chain Graphs dan Tadpole Chain Graphs $T(n,r)$ (Gede & Adiwijaya, 2017), Graf Rantai Nonagon dan Graf Rantai Nonagon dengan sisi Pندان (Fauziah & Rosyida, 2022), Graf Rantai Heptagon dan Graf Rantai Heptagon dengan Dua Sisi Pندان (Prianasari & Rosyida, 2022). Namun beberapa kajian dan konstruksi dari variasi graf rantai tersebut, belum banyak yang menemukan variasi graf rantai yang memenuhi pelabelan graceful. Jika dibandingkan dengan variasi dari graf rantai yang memenuhi pelabelan lain. Selain itu, belum ada kajian yang secara khusus membahas mengenai graf rantai yang terelasi C_4 yang memenuhi pelabelan graceful. Sehingga tidak menutup kemungkinan bahwa masih terbuka penelitian untuk mengkaji dan mengkonstruksi variasi baru dari graf rantai khususnya graf rantai terelasi C_4

yang dapat dilabeli dengan pelabelan graceful. Dengan demikian penulis bermaksud untuk mengkonstruksi variasi dari graf rantai, khususnya yang terelasi C_4 yang belum dikaji yaitu *Tailed-snake graphs*, *Rectangle-snake graphs*, Graf Rantai $\left[\overline{K}(r,2)^{(n)}\right]$, dan Graf Rantai Super $\left[\left[C_4^{(m)}\right]_c^{(r)}\right]$ serta membuktikan bahwa graf-graf tersebut dapat dilabeli dengan pelabelan graceful. Maka dari itu, penulis merumuskan penelitian ini dengan judul **“Pelabelan Graceful Pada Beberapa Graf Rantai Terelasi C_4 ”**.

1.2 Rumusan Masalah

Maka berdasarkan pemaparan latar belakang diatas, adapun rumusan masalah yang dikaji dalam penelitian ini yaitu bagaimana konstruksi serta pelabelan graceful pada variasi graf rantai yang terelasi C_4 , meliputi *Tailed-snake graphs*, *Rectangle-snake graphs*, Graf Rantai $\left[\overline{K}(r,2)^{(n)}\right]$, dan Graf Rantai Super $\left[\left[C_4^{(m)}\right]_c^{(r)}\right]$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diajukan maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkonstruksi serta menentukan pelabelan graceful pada beberapa variasi graf rantai terelasi C_4 yaitu *Tailed-snake graphs*, *Rectangle-snake graphs*, Graf Rantai $\left[\overline{K}(r,2)^{(n)}\right]$, dan Graf Rantai Super $\left[\left[C_4^{(m)}\right]_c^{(r)}\right]$.

1.4 Manfaat Penelitian

1.4.1 Manfaat Teoritis

Adapun manfaat teoritis yang diharapkan oleh penulis dalam penelitian ini, yakni dapat dijadikan acuan dan referensi untuk pengembangan dari pelabelan graf khususnya yang berkaitan dengan pelabelan graceful, memberikan sumbangsih pemikiran dan ide yang berkaitan dengan pelabelan graceful khususnya pada beberapa graf rantai terelasi C_4 , menambah variasi dari jenis-jenis graf rantai dan memotivasi penelitian sejenis yang berkaitan dengan graf rantai terelasi C_4 .

1.4.2 Manfaat Praktis

a) Bagi Peneliti

Meningkatkan pemahaman terkait pelabelan graf khususnya pelabelan graceful, memperoleh pengalaman dan kesempatan dalam melaksanakan penelitian dan menyusun karya ilmiah, serta dapat mengaplikasikan ilmu yang telah dipelajari.

b) Bagi Pembaca

Memberikan wawasan dan pemahan kepada pembaca mengenai pelabelan graf khususnya terkait pelabelan graceful serta dapat dijadikan acuan dalam melaksanakan penelitian yang sejenis.