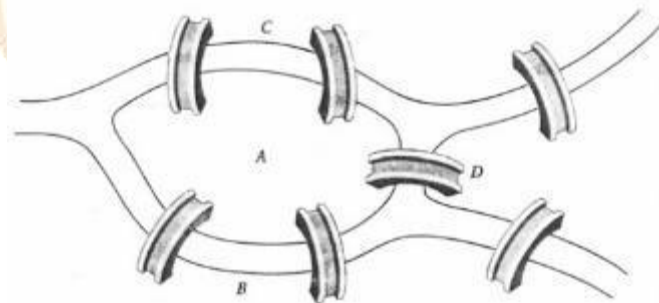


BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Leonhard Euler pada tahun 1736 memperkenalkan *teori graf* melalui percobaan penyelesaian masalah jembatan Königsberg, yaitu apakah terdapat kemungkinan melalui empat wilayah yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan di sungai Pregel, Königsberg tepat sekali dan berakhir di tempat awal (Sulistyorini, 2018). Euler kemudian menggunakan titik untuk menyatakan daratan, sedangkan garis/sisi digunakan untuk menyatakan jembatan-jembatan yang menghubungkan setiap daratan. Setelah beberapa kali percobaan dilakukan, Euler mengambil kesimpulan bahwa tidak ada kemungkinan seseorang bisa melewati semua jembatan dengan tepat sekali dan berakhir di posisi awal. Pemecahan masalah ini merupakan awal mula kemunculan teori graf.



Gambar 1. 1 Ilustrasi Jembatan Königsberg

Graf $G := (V, E)$ didefinisikan sebagai sistem yang dibangun dari himpunan titik yang tak kosong $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, \dots\}$, sehingga untuk setiap sisi e_k kemudian ditautkan dengan suatu pasang titik tak terurut (v_i, v_j) dengan v_i, v_j disebut sebagai titik-titik ujung.

Berdasarkan definisi tersebut, sebuah graf mungkin untuk tidak memiliki satu pun sisi, tetapi wajib memiliki paling sedikit satu buah titik. Graf demikian disebut sebagai graf *kosong/null*, dengan notasi O_p . Graf C_n atau *graf siklus* dengan n titik merupakan suatu graf yang setiap titiknya bertautan dengan dua buah sisi. Graf P_n atau *graf lintasan* adalah suatu graf yang memiliki satu lintasan dengan n titik dan $n - 1$ sisi. Graf tak terhubung $P(m, s)$ adalah gabungan dari graf lintasan dengan s buah sisi dan graf *kosong/null* dengan $m - (s + 1)$ buah titik, di mana $m > s + 1$. Graf $I(n, t)$ merupakan graf tak terhubung dengan n titik dan t sisi yang saling asing, dengan $n \geq 2t + 1$. Pembahasan lebih lanjut tentang graf disebut dengan teori graf.

Penelitian mengenai teori graf khususnya *pelabelan graf* dari waktu ke waktu mengalami banyak perkembangan. Salah satu pelabelan graf yang sedang banyak diteliti saat ini adalah *pelabelan graceful*. *Graf graceful* dan metode pelabelannya pertama kali diperkenalkan oleh A. Rosa yang bernamakan pelabelan β (β - *labellings*) di mana setiap titik diberikan label dengan nomor berbeda dari 0 hingga m , dengan m adalah banyak sisi pada graf, sehingga setiap sisi graf memiliki label sebagai selisih absolut dari kedua label titik yang dihubungkannya, serta label sisi yang diberikan haruslah bersifat unik dalam graf tersebut. Kemudian pada tahun 1972, pelabelan β kembali dikembangkan dan akhirnya berubah nama menjadi pelabelan *graceful* atas gagasan dari S. W. Golomb (Zhou, 2016). Survei terkini mengenai pelabelan graf yang telah dilaksanakan terangkum pada Gallian.

Misalkan $G(V, E)$ adalah suatu graf. G kemudian disebut sebagai (m, n) - *graph* jika memiliki m buah titik ($|V(G)| = m$) dan n buah sisi ($|E(G)| = n$). Asumsikan bahwa $2 \leq n \leq m + 1$ untuk memperjelas pemilihan nilai m dan n

yang berpengaruh terhadap teknik pelabelan yang akan diterapkan, di mana tidak mungkin untuk melakukan pelabelan titik jika banyak bilangan label kurang dari banyaknya titik. Suatu pelabelan graceful dari G merupakan injektif: $V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ sedemikian sehingga memenuhi pemetaan f^* terinduksi, yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ untuk setiap sisi uv di G adalah bijeksi antara $E(G)$ dan $\{1, 2, \dots, m\}$. G disebut sebagai graf graceful jika memiliki pelabelan graceful (Koh et al., 2015).

Dalam teori graf, seseorang dapat menghasilkan berbagai macam graf baru dari graf yang telah ada dengan memanfaatkan operasi graf. Andaikan G dan H adalah dua buah yang saling asing. *Join* G dan H , yang dituliskan dengan $G + H$, merupakan suatu graf yang didapat dari penyatuan antara G dan H dengan menghubungkan setiap titik di G ke setiap titik di H . Jika graf G dan graf H berturut-turut adalah $(m, s) - graph$ dan $(n, t) - graph$, maka banyaknya titik dan sisi pada graf *join* yang dihasilkan masing-masing adalah $m + n$ dan $mn + s + t$ (Zeen El Deen & Omar, 2020).

Dalam penelitannya, Koh et al (2015) telah membuktikan beberapa kelompok graf *join* yang memiliki pelabelan graceful, yaitu $O_p + P(n, t)$ untuk $p \geq 1, n \geq t + 2$ dan $t \geq 1$, $O_p + I(n, t)$ untuk $p \geq 1, n \geq 2t + 1$ dan $t \geq 1$, $P(m, s) + P(n, t)$ untuk $m \geq s + 2$ dan $n \geq t + 2$, serta $C_5 + P(n, 1)$ untuk $n \geq 3$.

Koh et al (2015) menyatakan beberapa *open problem* pada tulisannya, diantaranya adalah menentukan apakah *join* dari $P(m, s) + P(n, t)$ akan selalu graceful untuk semua $m \geq s + 2$ dan $n \geq t + 2$, di mana $s \geq 3$ atau $t \geq 3$.

Serta apakah $join P(m, s) + I(n, t)$ dengan $m \geq s + 2$ dan $n \geq 2t + 1$ adalah graceful. Beberapa peneliti telah menuliskan hasil penelitian terkait pelabelan graceful dari graf $join$ dan masalah terbuka ini masih belum dapat terpecahkan. Penelitian ini bertujuan untuk melanjutkan kajian yang telah dilakukan terhadap beberapa kelompok graf yang belum dikaji serta menjawab *open problem* tersebut, khususnya $join P(m, s) + P(n, t)$ untuk $m \geq s + 2$ dan $n \geq t + 2$, saat $s \geq 3$, serta $join P(m, s) + I(n, t)$ dengan $m \geq s + 2$ dan $n \geq 2t + 1$. Berdasarkan paparan diatas, penulis kemudian merumuskan penelitian dengan judul **“Pelabelan Graceful Pada Beberapa Graf Join”**

1.1 Rumusan Masalah

Koh et al (2015) pada tulisannya menyajikan beberapa *open problem* yang diataranya menjadi landasan pada penelitian ini.

Problem 1. Apakah $join P(m, s) + I(n, t)$ selalu graceful untuk semua $m \geq s + 2$ dan $n \geq t + 2$, di mana $s \geq 3$ atau $t \geq 3$?

Problem 2 Teliti sifat graceful dari keluarga graf berikut: $P(m, s) + I(n, t)$ dengan $m \geq s + 2$ dan $n \geq 2t + 1$.

Berdasarkan *open problem* diatas, rumusan masalah yang digunakan pada penelitian ini adalah bagaimana pelabelan graceful pada dua jenis graf $join$, yaitu: $P(m, s) + P(n, t)$ dan $P(m, s) + I(n, t)$?

1.2 Tujuan Penelitian

Pelaksanaan penelitian ini bertujuan untuk menentukan pelabelan graceful pada $join P(m, s) + P(n, t)$ dan $join P(m, s) + I(n, t)$.

1.3 Manfaat Penelitian

1.4.1 Manfaat Teoretis

Mampu memberikan tambahan pemikiran pada bidang matematika khususnya pada pelabelan graf, sekaligus untuk menjawab beberapa *open problem* yang terdapat pada jurnal dengan judul “*The Gracefulness of the Join of Graphs (II)*” yang dipublikasikan pada *AKCE International Journals of Graph and Combinatorics* (Koh et al., 2015).

1.4.2 Manfaat Praktis

a. Bagi Peneliti

Menambah pemahaman dan pengetahuan terhadap teori graf khususnya pelabelan graceful pada graf *join*, menambah keterampilan dalam melaksanakan penelitian dan penyusunan karya ilmiah, serta mampu menerapkan ilmu yang telah didapat selama perkuliahan.

b. Bagi Pembaca

Meningkatkan ilmu pengetahuan pembaca mengenai teori graf khususnya pelabelan graceful pada graf *join* serta dapat dijadikan landasan dalam melaksanakan penelitian topik sejenis.