

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Graf  $G = (V, E)$  adalah struktur matematika yang terdiri dari dua himpunan  $V$  dan  $E$ . Elemen-elemen dari  $V$  disebut titik, dan elemen-elemen dari  $E$  disebut sisi. Setiap sisi memiliki himpunan satu atau dua titik yang berasosiasi dengannya, yang disebut titik ujungnya (Chang Nichols, 2002). *Pewarnaan graf* merupakan proses mewarnai suatu himpunan titik atau himpunan sisi pada suatu graf menggunakan sejumlah warna dengan beberapa syarat tertentu. Pewarnaan graf dibagi menjadi 3 berdasarkan objek pewarnaannya, yaitu: (1) *pewarnaan titik* merupakan proses pemberian warna pada himpunan titik sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda; (2) *pewarnaan sisi* merupakan proses pemberian warna pada suatu himpunan sisi sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang bertetangga tidak memiliki warna yang berbeda; (3) *pewarnaan daerah* merupakan proses pemberian warna pada suatu himpunan daerah pada graf sedemikian hingga semua daerah memiliki warna yang berbeda (Kubale, 2004).

Salah satu jenis pewarnaan graf adalah *pewarnaan graceful*. Pewarnaan graceful pertama kali di perkenalkan oleh Chartrand dan Zhang (2015) yang didefinisikan sebagai pewarnaan dari setiap himpunan titik dan himpunan sisi dengan menggunakan bilangan asli, dimana label/warna yang digunakan boleh berulang pada himpunan titik maupun himpunan sisinya, dengan syarat tidak ada

titik maupun sisi yang bertetangga pada graf tersebut memiliki warna yang sama. Pemberian warna setiap sisi pada graf sama dengan selisih dari label kedua titik ujung sisi tersebut. *Bilangan kromatik* pada pewarnaan *graceful* dari graf  $G$  merupakan jumlah warna minimal yang dapat digunakan sehingga pada graf  $G$  memiliki bilangan kromatik *graceful* yang di notasikan dengan  $\chi_g(G)$  (Byers, 2018).

Seiring berjalannya waktu banyak graf telah di kembangkan oleh para peneliti, beberapa jenis graf tersebut diantaranya adalah sebagai berikut: *Graf bintang* dengan  $n$  titik di simbolkan dengan  $K_{1,n-1}$  merupakan suatu graf yang memiliki satu titik berderajat  $(n - 1)$  yang disebut titik pusat dan  $(n - 1)$  titik berderajat 1 yang disebut sebagai daun. *Graf cycle* dengan  $n$  titik di simbolkan dengan  $C_n$  adalah graf terhubung dengan  $n$  titik yang mempunyai tepat satu siklus dengan  $n$  buah sisi. *Graf lintasan* dengan  $n$  titik di simbolkan dengan  $P_n$  merupakan suatu graf yang terdiri oleh dua titik yang berderajat satu, disebut ujung dari lintasan dan  $n - 2$  titik yang berderajat dua, serta mempunyai  $n - 1$  sisi (Septiana & Rahadjeng, 2012).

Dalam teori graf seseorang dapat menghasilkan graf baru dengan memanfaatkan operasi graf, salah satunya adalah dengan menggunakan *cartesian product*. *Cartesian product* dari dua himpunan A dan B, dilambangkan dengan  $A \times B$ , merupakan himpunan semua pasangan terurut  $(a, b)$  dimana  $a \in A$  dan  $b \in B$ . Misalkan dua buah graf yang saling asing yaitu  $G$  dan  $H$ , *cartesian product* dari  $G$  dan  $H$  adalah suatu graf, dinotasikan dengan  $G \times H$ , yang himpunan titiknya  $V(G) \times V(H)$  dan  $xy, uv \in G \times H$  adalah bertetangga (*adjacent*) di  $G \times$

$H$ , jika  $x = u$  dan  $yv \in E_H$  atau  $y = v$  dan  $xu \in E_G$ . Graf  $G$  dan  $H$  kemudian disebut sebagai faktor dari *product*  $G \times H$  (Harary, 1994).

Dalam penelitiannya, (Asy'Ari et al., 2022) telah membuktikan beberapa bilangan kromatik graceful pada beberapa jenis graf, diantaranya adalah graf bintang, graf *cycle*, graf *path*, dan graf *cartesian product*. Selain itu (Asy'Ari et al., 2022) juga menyatakan beberapa masalah terbuka pada tulisannya, salah satunya adalah menentukan bilangan kromatik graceful dari operasi graf, yaitu *cartesian product*. Beberapa peneliti telah menuliskan hasil penelitian mengenai bilangan kromatik graceful pada beberapa jenis graf, dan masalah terbuka ini masih belum dapat terpecahkan. Penelitian ini bertujuan untuk melanjutkan kajian yang telah dilakukan terhadap jenis graf yang belum dikaji serta menjawab masalah terbuka tersebut, khususnya bilangan kromatik graceful pada graf *cartesian product*. Berdasarkan latar belakang yang telah di paparkan, judul dari penelitian ini adalah “**Kajian Bilangan Kromatik Graceful untuk Graf  $C_m \times P_n$** ”.

## 1.2. Rumusan Masalah

Penelitian ini dilandasi oleh suatu masalah terbuka yang disajikan pada penelitian (Asy'Ari et al., 2022).

**Problem 1.** Tentukan bilangan kromatik graceful dari operasi graf *Cartesian product*.

Berdasarkan masalah terbuka tersebut, rumusan masalah yang akan dikaji pada penelitian ini yaitu menentukan bilangan kromatik graceful dari graf operasi *Cartesian product*  $C_m \times P_n$ .

### 1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah di utarakan di atas, penelitian ini bertujuan untuk menemukan bilangan kromatik graceful pada graf  $C_m \times P_n$ .

### 1.4. Manfaat Penelitian

#### 1.4.1. Manfaat Teoretis

Salah satu manfaat pada penelitian ini yaitu manfaat secara teoritis dimana yang diharapkan pada penelitian ini adalah untuk dapat menambah ilmu pengetahuan pada bidang matematika khususnya pada pewarnaan graf.

#### 1.4.2. Manfaat Praktis

- a. Menjawab masalah terbuka yang terdapat pada jurnal dengan judul “*On Graceful chromatic number of some graphs*” yang disusun oleh (Asy’Ari et al., 2022).
- b. Hasil yang didapat dari penelitian ini bermanfaat untuk dijadikan landasan kajian pada pengembangan ilmu pengetahuan.