DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Uji Kesetaraan Sampel Penelitian

Data Uji Kesetaraan Sampel Penelitian Nilai PAT Kelas X IPS SMA Negeri 1 Baturiti Tahun Pelajaran 2021/2022

Kelas : X IPS 1

No	Nama Siswa	Nilai
1	A.A Ayu Nadya Rima Widyastiti	74
2	I Gede Rendra Saputra	80
3	I Kadek Diva Pranata	77
4	I Kadek Dodi Permana Putra	71
5	I Kadek Reva Darmagiri	75
6	I Komang Ariel Dani Aprilio	84
7	I Made Budi Merta Yasa	74
8	I Made Sarwa Artha Jaya Wiguna Putra	81
9	I Made Yoga Wirakusuma	77
10	I Nyoman Aga Pala Adhi	80
11	I Nyoman Agus Andi Darmawan	75
12	I Nyoman Rama Adi Sucipto	76
13	I Putu Adi Wiraguna	70
14	I Putu Ongki Arta Yana	72
15	I Putu Rendi Wira Wiguna	80
16	I Wayan Dony Wija Putra	84
17	I Wayan Surya Jaya	75
18	I Wayan Yoga Widyastra	69
19	Kadek Elni Asih	79
20	Komang Andika Putra	73
21	Luh Candra Mertira Sari	76
22	Ni Kadek Aprilia	76
23	Ni Luh Ade Dwi Sadya Febriani	78
24	Ni Luh Budi Prasita	69
25	Ni Luh Gede Frizka Cahaya Pratiwi	77
26	Ni Luh Jeni Ariati	79
27	Ni Luh Made Dwi Darma Yanti	82
28	Ni Luh Putu Dea Sandhiari Asih	77
29	Ni Luh Putu Lidia Lestari	73
30	Ni Luh Putu Sutriyani	79
31	Ni Luh Putu Suyantini	83
32	Ni Made Herlinayanti	80
33	Ni Wayan Ariani	79
34	Ni Wayan Okta Geo Vany	69
35	Titania Kalyani Suarlim	79

36	Try Mulya Candra Putra	77

Kelas : X IPS 2

No	Nama Siswa	Nilai
1	I Dewa Putu Putra Pramana	76
2	I Gede Putra Wisnawa	79
3	I Kadek Ari Pranata	76
4	I Kadek Deni Kusuma	82
5	I Kadek Yudis Adi Guna Darma	81
6	I Ketut Ari Sudiantara	83
7	I Ketut Sandi Wiranata	72
8	I Komang Kresna Tri Guna	79
9	I Made Dresta Wahyu Setiawan	80
10	I Made Klusa Jalarasi	82
11	I Made Nata Sukrawan	79
12	I Made Surya Pastika	71
13	I Pande Made Egi Pramudiana	78
14	I Putu Aditya Wira Sastrawan	74
15	I Putu Berlian	79
16	I Wayan Adi Mustika	84
17	I Wayan Agus Krisna Raditya Wiputra	82
18	I Wayan Edy Pradnyanata	83
19	Made Narendhra Mahagupta Winarsa	79
20	Ni Kadek Ana Wirayanti	86
21	Ni Kadek Anastasya Yunita Maharani	81
22	Ni Kadek Dewi Anjani	70
23	Ni Kadek Ilda Dwi Candra	73
24	Ni Kadek Rany Senja Pratiwi	68
25	Ni Kadek Sovi Sapitri	71
26	Ni Kadek Sri Hari Ariani	84
27	Ni Ketut Sri Fitria Ramadani	75
28	Ni Luh Lisa Eka Putri	73
29	Ni Luh Putu Dian Kartika	74
30	Ni Luh Putu Melyana Widya Artini	80
31	Ni Luh Rahayuni Dewi	78
32	Ni Made Dianti	77
33	Ni Made Parwati	81
34	Ni Made Wikayani	74
35	Ni Made Wulan KusumaWardani	75
36	Putu Eka Adi Darmawan	73
37	Ni Kadek Dian Kusuma Dewi	80

Kelas : X IPS 3

No	Nama Siswa	Nilai
1	I Gusti Ayu Made Dwi Rahayu	77
2	I Gede Widiana	78
3	I Gusti Ngurah Darma Ari Kencana	78
4	I Kadek Arya Satrya Anggara	79
5	I Kadek Parta Kesawa	79
6	I Kadek Riski Raditya	82
7	I Komang Adi Eka Darmawan	78
8	I Komang Krisna Pana	80
9	I Made Aris Adinata Astawa	71
10	I Made Arya Prasetya	73
11	I Made Dida Aparigraha	72
12	I Made Dodi Sanjaya	77
13	I Made Sueca Yasa	73
14	I Putu Dananjaya Aditya Putra	82
15	I Putu Nanda Nugraha Wijaksana	76
16	I Wayan Andika Saputra	80
17	I Wayan Wahyu Dana Arta	75
18	Kadek Dheo Suputra Yadnya	76
19	Lilis Aprilia Putri	78
20	Ni Luh De Sintya Dewi	77
21	Marcellinus Dicky Wirachris	79
22	Muhammad Affadhiel Zanuary	80
23	Ni Kadek Dwi Puspita Dewi	75
24	Ni Kadek Nitri Asih	83
25	Ni Kadek Purnama Sari	75
26	Ni Komang Bintang Tri Pramita Dewi	79
27	Ni Luh Indriantini	74
28	Ni Luh Putu Wangi Indrayani	76
29	Ni Made Dwiantari	81
30	Ni Made Kharisma Diah Pratiwi	77
31	Ni Made Febriyanti	77
32	Ni Putu Ayu Sinta Selvitipani	75
33	Ni Putu Juniari	83
34	Putu Bagus Arta Wibawa	66
35	Putu Diana Rahmadewi	77
36	I Putu Sumitra Yasa	66
37	Selsa Billa Syahrani	81

Statistik Deskriptif

Descriptives

	Kelas			Statistic	Std. Error
Nilai	X IPS 1	Mean		76.64	.687
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	75.24	
			Upper Bound	78.03	
		5% Trimmed Mean		76.65	
		Median		77.00	
		Variance		16.980	
		Std. Deviation		4.121	
		Minimum		69	
		Maximum		84	
		Range		15	
		Interquartile Range		6	
		Skewness		-.235	.393
		Kurtosis		-.515	.768
	X IPS 2	Mean		77.62	.736
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	76.13	
			Upper Bound	79.11	
		5% Trimmed Mean		77.69	
		Median		79.00	
		Variance		20.020	
		Std. Deviation		4.474	
		Minimum		68	
		Maximum		86	
		Range		18	
		Interquartile Range		7	
		Skewness		-.241	.388
		Kurtosis		-.786	.759
	X IPS 3	Mean		76.89	.650
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	75.57	
			Upper Bound	78.21	
		5% Trimmed Mean		77.16	
		Median		77.00	
		Variance		15.655	
		Std. Deviation		3.957	
		Minimum		66	
		Maximum		83	

	Range	17	
	Interquartile Range	5	
	Skewness	-.988	.388
	Kurtosis	1.499	.759

Uji Normalitas

Tests of Normality

Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
.106	36	.200*	.966	36	.321
.134	37	.089	.972	37	.478
.133	37	.099	.929	37	.021

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Uji Homogenitas

Test of Homogeneity of Variances

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Nilai	Based on Mean	1.208	2	107	.303
	Based on Median	.913	2	107	.405
	Based on Median and with adjusted df	.913	2	106.068	.405
	Based on trimmed mean	1.202	2	107	.305

Anova

ANOVA

Nilai

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	19.097	2	9.548	.544	.582
Within Groups	1878.576	107	17.557		
Total	1897.673	109			

Lampiran 2. Kisi-kisi Tes Pemahaman Konsep

KISI-KISI TES

PEMAHAMAN KONSEP MATEMATIKA

Satuan Pendidikan	: SMA Negeri 1 Baturiti
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: XI
Materi Pokok	: Induksi Matematika
Waktu	: 90 menit
Banyak Butir Soal	: 3
Bentuk Soal	: Uraian

Kompetensi Dasar	Materi	IPK	Indikator Pemahaman Konsep	No Soal	Bentuk Soal
3.1 Menjelaskan metode pembuktian pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika	Induksi Matematika	Menjelaskan prinsip induksi matematika	Siswa dapat menyatakan kembali konsep dengan kata-kata sendiri	1b	Uraian
		Menentukan suatu prinsip induksi matematika	Siswa dapat mengidentifikasi contoh dan bukan contoh dari suatu konsep	1a	Uraian
		Menyelesaikan masalah induksi matematika dengan metode pembuktian berupa ketidaksamaan dan keterbagian	Siswa dapat mengaplikasikan konsep dengan benar dalam berbagai situasi	2a	Uraian
4.1 Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian				2b	
		Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan induksi matematika kuat		3	Uraian

LEMBAR TES

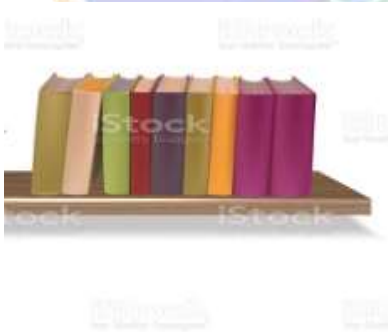
PEMAHAMAN KONSEP MATEMATIKA

Satuan Pendidikan	: SMA Negeri 1 Baturiti
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: XI
Materi Pokok	: Induksi Matematika
Waktu	: 90 menit

Petunjuk Umum:

1. Tulislah identitas pada pojok kanan atas lembar jawaban (nama, nomor absen, dan kelas)
2. Lembar soal tidak boleh dicoret
3. Periksa dan bacalah soal dengan teliti sebelum menjawab
4. Kerjakan dengan langkah-langkah yang tepat dan lengkap
5. Dilarang membuka catatan atau buku pelajaran matematika dan mencontek
6. Periksa kembali lembar jawaban sebelum dikumpulkan

1. Perhatikan gambar di bawah ini.



(1) sebarisan buku-buku

(2) orang berjalan

a) Yang manakah dari gambar di atas dianggap sebagai suatu contoh penerapan prinsip induksi matematika dan dari gambar yang dianggap benar tentukan langkah-langkah yang benar dari prinsip induksi matematikanya
b) Mengapa gambar tersebut dikatakan contoh penerapan prinsip induksi matematika

2. Gunakan induksi matematis untuk membuktikan kebenaran pernyataan

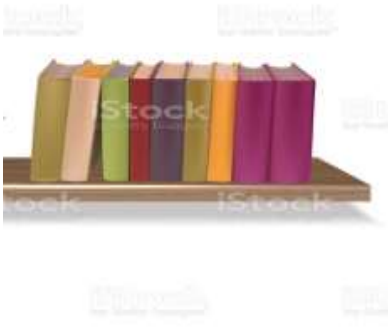
berikut.

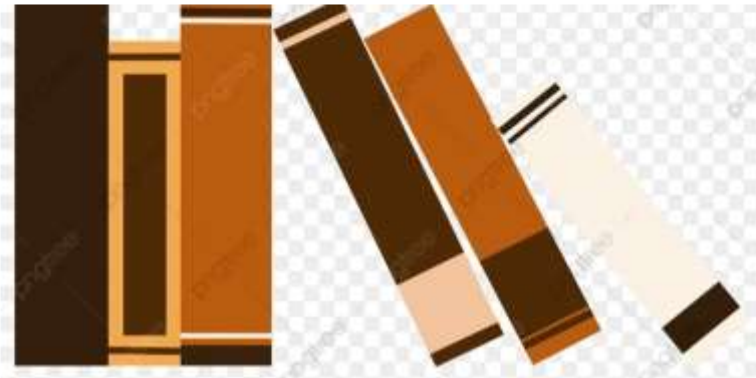
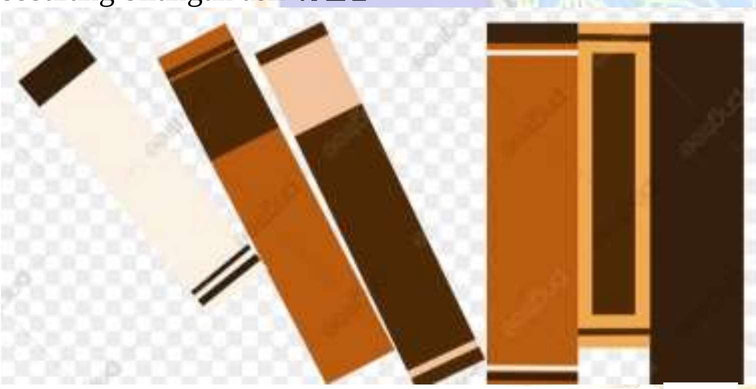
a. $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 7$

b. $n^3 - n + 3$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n

3. Didefinisikan sebuah barisan $U_0, U_1, U_2, \ldots.$ dengan $U_0 = 0$, $U_1 = 4$, $U_k = 6U_{k-1} - 5U_{k-2}$ untuk semua bilangan bulat $k \geq 2$. Untuk masing-masing bilangan bulat $n \geq 0$, suku ke$-n$ dari barisan tersebut memiliki nilai yang sama dengan rumus $5^n - 1$. Dengan kata lain, suku ke$-n$ pada barisan ini memenuhi persamaan $U_n = 5^n - 1$. Buktikan bahwa pernyataan tersebut benar.

RUBRIK PENILAIAN

<table>
<tr><th>No soal</th><th>Kunci jawaban</th><th>skor</th></tr>
<tr><td colspan="3">Siswa dapat mengidentifikasi contoh dan bukan contoh dari suatu konsep</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>1. Yang manakah dari gambar di atas dianggap sebagai suatu contoh penerapan prinsip induksi matematika?
Pembahasan:
Dari kedua gambar tersebut yang merupakan sebagai suatu penerapan prinsip induksi matematika adalah Gambar (1) yaitu barisan buku-buku

2. Dari gambar yang dianggap benar tentukan langkah-langkah yang benar dari prinsip induksi matematikanya
Pembahasan:
Karena gambar (1) adalah penerapan prinsip induksi matematika, maka sesuai dengan langkah induksi matematika yaitu terdapat dua langkah:
• Langkah dasar (basis step), Menunjukkan $P(1)$ bernilai benar
• Langkah induktif (inductive step), Mengasumsikan $P(k)$ bernilai benar, Membuktikan $P(k+1)$ juga bernilai benar</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Siswa dapat menyatakan kembali konsep dengan kata-kata sendiri</td></tr>
</table>

1b	Mengapa gambar tersebut dikatakan contoh penerapan prinsip induksi matematika? Untuk memberikan gambaran tentang induksi matematika, bayangkan sebarisan buku-buku seperti gambar di bawah ini:  Dari gambar di atas, kita gunakan dua asumsi: 1. Buku pertama dijatuhkan 2. Jika suatu buku dijatuhkan, maka buku berikutnya juga akan jatuh Jika dua asumsi tersebut benar, maka seluruh buku juga akan jatuh. Untuk melihat hubungan hal tersebut dengan prinsip induksi matematika, kita misalkan $P(n)$ adalah kalimat “buku ke- n akan jatuh”. Ini dapat dinyatakan bahwa jika $P(1)$ benar (buku pertama jatuh), maka untuk sebarang $k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar (buku ke-k jatuh), maka $P(k+1)$ juga bernilai benar (buku ke-$(k+1)$ juga jatuh). Menurut prinsip induksi matematika, maka $P(n)$, yaitu kartu ke-n jatuh juga bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$  $k+1$ k 3 2 1	2

<table>
<tr><th colspan="3">Siswa dapat mengaplikasikan konsep dengan benar dalam berbagai situasi</th></tr>
<tr><td>2a</td><td>

$\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 7$

Dengan diketaui soal seperti di atas maka untuk dapat menjawabnya digunakan rumus penerapan induksi matematika pada ketidaksaamaan
Penyelesaian:

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 2,3,4,5$, dan 6

- Langkah dasar
Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 7$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(7)$
Perhatikan bahwa $P(7)$ benar karena $\left(\frac{4}{3}\right)^7 = 7{,}49 > 7$ maka langkah dasar selesai
- Langkah induktif
Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$ yaitu asumsikan bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$, maka $\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > (k+1)$ juga benar. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^k \times \frac{4}{3}\\ &> k \times \frac{4}{3}\\ &= k\left(1+\frac{1}{3}\right)\\ &= k + \frac{1}{3}k\\ &> k+1 \quad \text{Untuk } k \geq 7\end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Maka langkah induktif selesai, karena langkah dasar dan langkah induktif sudaf diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 7$. Dengan demikian terbukti bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 7$

</td><td>4</td></tr>
</table>

2b	$n^3 - n + 3$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n Dengan diketaui soal seperti di atas maka untuk dapat menjawabnya digunakan rumus penerapan induksi matematika pada keterbagian Penyelesaian: Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 3 adalah faktor dari $n^3 - n + 3$ • Langkah dasar Untuk $P(1)$ benar karena $n^3 - n + 3 = 1^3 - 1 + 3 = 3 = 3 \cdot 1$ Sehingga 3 adalah faktor dari $n^3 - n + 3$ untuk $n = 1$ maka langkah dasar selesai • Langkah induktif Sebagai hipotesis induktif,asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 3 adalah faktor dari $k^3 - k + 3$ atau ekuivalen dengan $k^3 - k + 3 = 3c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ yaitu pernyataan bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3 - (k+1) + 3$ juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3 - (k+1) + 3$ Perhatikan bahwa $(k+1)^3 - (k+1) + 3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 + 3$ $= (k^3 - k + 3) + 3k^2 + 3k$ $= (k^3 - k + 3) + 3(k^2 + k)$ $= 3c + 3(k^2 + k)$ $= 3(c + k^2 + k)$ Dari baris terakhir, karena bentuk $(c + k^2 + k)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3 - (k+1) + 3$. Jadi $P(k+1)$ benar. Langkah induktif selesai Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah selesai, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $n^3 - n + 3$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n	4

3	Didefinisikan sebuah barisan $U_0, U_1, U_2, ...$ dengan $U_0 = 0$, $U_1 = 4$, $U_k = 6U_{k-1} - 5U_{k-2}$ untuk semua bilangan bulat $k \geq 2$. Untuk masing-masing bilangan bulat $n \geq 0$, suku ke$-n$ dari barisan tersebut memiliki nilai yang sama dengan rumus $5^n - 1$. Dengan kata lain, dikatakan bahwa semua suku pada barisan ini memenuhi persamaan $U_n = 5^n - 1$. Buktikan bahwa pernyataan tersebut benar Penyelesaian: Misalkan sebuah barisan $U_0, U_1, U_2, ...$ dengan $U_0 = 0$, $U_1 = 4$, $U_k = 6U_{k-1} - 5U_{k-2}$ untuk semua bilangan bulat $k \geq 2$ dan misalkan $P(n) = U_n = 5^n - 1$. Dibuktikan untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 0$ $P(n)$ adalah benar • Langkah basis Untuk membuktikan $P(0)$ dan $P(1)$, harus ditunjukkan bahwa $P(0) = U_0 = 5^0 - 1$ $P(1) = U_1 = 5^1 - 1$ Namun berdasarkan definisi pada $U_0, U_1, U_2, ...$ bahwa $U_0 = 0$, dan $U_1 = 4$. Karena $P(0) = U_0 = 5^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ dan $P(1) = U_1 = 5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$, maka nilai pada U_0 dan U_1 sesuai dengan nilai pada rumus yang diberikan. • Langkah induktif Misalkan k merupakan bilangan bulat dengan $k \geq 1$ dan anggap bahwa hipotesis induktifnya $U_i = 5^i - 1$ utntuk seumua bilangan bulat i dengan $0 \leq i \leq k$. Harus dibuktikan bahwa $P(k+1) = U_{k+1} = 5^{k+1} - 1$. Namun karena $k \geq 1$ didapat bahwa $k + 1 \geq 2$ sehingga $U_{k+1} = 6U_k - 5U_{k-1}$ $= 6(5^k - 1) - 5(5^{k-1} - 1)$ $= 6 \cdot 5^k - 6 - 5^k + 5$ $= (6-1)5^k - 1$ $= 5 \cdot 5^k - 1$ $= 5^{k+1} - 1$ Karena langkah basis dan langkah induktif telah dibuktikan dan terbukti benar dapat disimpulkan bahwa pernyataan yang diberikan tersebut adalah benar	4

Skor pemahaman konsep matematika= $\frac{total\ skor\ siswa}{total\ skor\ maksimum} \times 100$

Lampiran 3. Lembar Validasi Tes Pemahaman Konsep Matematika

LEMBAR VALIDASI

TES PEMAHAMAN KONSEP MATEMATIKA

IPK	No Soal	Penilaian	
		Valid	Tidak Valid
Menjelaskan prinsip induksi matematika	1b	√	
Menentukan suatu prinsip induksi matematika	1a	√	
Menyelesaikan masalah induksi matematika dengan metode pembuktian berupa ketidaksamaan dan keterbagian	2a	√	
	2b	√	
Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan induksi matematika kuat	3	√	

Singaraja, 27 Juni 2022

Dosen Ahli

Telah ditandatangani secara elektronik
Putu Kartika Dewi, S.Pd.,M.Sc.
NIP : 199004202019032021
Email : kartika.dewi@undiksha.ac.id

LEMBAR VALIDASI

TES PEMAHAMAN KONSEP MATEMATIKA

IPK	No Soal	Penilaian	
		Valid	Tidak Valid
Menjelaskan prinsip induksi matematika	1b	√	
Menentukan suatu prinsip induksi matematika	1a	√	
Menyelesaikan masalah induksi matematika dengan metode pembuktian berupa ketidaksamaan dan keterbagian	2a	√	
	2b	√	
Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan induksi matematika kuat	3	√	

Singaraja, 29 Juli 2022

Dosen Ahli

Wisna

Dr. I Putu Wisna Ariawan, M.Si.

NIP. 196805191993031001

Lampiran 4. Data Uji Coba Instrumen Penelitian

Data Uji Coba Instrumen Penelitian Kelas XII IPS SMA Negeri 2 Tabanan

Tahun Pelajaran 2022/2023

No	Siswa	Kode
1	A.A Sagung Adelia Kirana Putri	**U1**
2	Aditya Ari Nugraha	**U2**
3	Ayu Putu Putri Setiadewi	**U3**
4	Galuh Gina Paramitha	**U4**
5	Gst. Pt. A. Marlionsa Pradiva Lanang	**U5**
6	I Gede Kadek Pandhya Adiatmika	**U6**
7	I Gede Kresna Sukawidarma	**U7**
8	I Gede Rama Dipa Mahendra	**U8**
9	I Gusti Agung Caka Pranata Saputra	**U9**
10	I Kadek Bayu Krisnayana	**U10**
11	I Kadek Nanda Whisma Radiatmika	**U11**
12	I Komang Harta Arya Wirawan	**U12**
13	I Made Saputra Ardinata	**U13**
14	I Made Wijaya Mastika Dwiputra	**U14**
15	I Md Satria Dalem Widhiantara	**U15**
16	I Putu Danandipa Prabakti	**U16**
17	I Putu Duta Juniada	**U17**
18	I Putu Gede Adi Pradnyandana Pasek	**U18**
19	I Putu Surya Kusuma	**U19**
20	I Wayan Lingga Sancita	**U20**
21	Ida Bagus Anom Pradnyana	**U21**
22	Marcel Louis Ananta Teja	**U22**
23	Ni Kadek Dimas Ayu Pandini	**U23**
24	Ni Komang Ayu Tri Wulandari Putri	**U24**
25	Ni Komang Sarita Candrayani	**U25**
26	Ni Luh Gede Nanda Maharani	**U26**
27	Ni Made Ayu Ardia Pramesti Swari	**U27**
28	Ni Made Laras Okta Anggarrani	**U28**
29	Ni Putu Ardelia Putri	**U29**
30	Ni Putu Ayu Putri Wiranti	**U30**
31	Ni Putu Ega Yuliani	**U31**
32	Ni Putu Mira Christina Wisnawa	**U32**
33	Ni Putu Silvia Lestari	**U33**
34	Putu Agus Sastra Indrawan	**U34**
35	Shafira Putri Nur Rahma	**U35**
36	Yogie Prasetya Himawan	**U36**

Nilai Uji Coba Instrumen

Kode Siswa	Soal 1		Soal 2		Soal 3	Jumlah skor
	a	b	a	b		
U1	2	1	4	4	4	15
U2	1	0	1	1	0	3
U3	2	1	4	4	4	15
U4	2	2	1	2	3	10
U5	1	1	1	1	0	4
U6	2	2	0	3	3	10
U7	2	1	2	2	1	8
U8	1	0	1	1	0	3
U9	2	0	4	3	4	13
U10	2	1	3	3	3	12
U11	2	2	2	0	2	8
U12	2	2	3	0	3	10
U13	1	1	2	0	2	6
U14	2	2	3	4	4	15
U15	0	1	0	1	2	4
U16	2	2	4	2	3	13
U17	0	1	1	1	2	5
U18	2	2	3	3	3	13
U19	2	2	3	3	1	11
U20	1	2	4	4	4	15
U21	1	2	2	1	3	9
U22	1	2	4	4	4	15
U23	1	1	2	0	1	5
U24	1	1	0	1	1	4
U25	1	2	4	4	4	15
U26	0	1	0	1	3	5
U27	0	1	1	2	0	4
U28	1	2	3	3	3	12
U29	2	2	4	3	4	15
U30	1	2	4	4	4	15
U31	2	2	0	3	2	9
U32	2	2	3	4	3	14
U33	2	2	4	4	3	15
U34	2	2	3	3	3	13
U35	2	2	4	4	3	15
U36	2	1	1	0	0	4

Analisis Deskriptif Uji Coba

Descriptive Statistics

	N	Range	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance
Soal 1a	36	2	0	2	1.44	.695	.483
Soal 1b	36	2	0	2	1.47	.654	.428
Soal 2a	36	4	0	4	2.36	1.457	2.123
Soal 2b	36	4	0	4	2.31	1.451	2.104
Soal 3	36	4	0	4	2.47	1.362	1.856
Jumlah skor	36	12	3	15	10.06	4.440	19.711
Valid N (listwise)	36						

Uji Validitas Kelas Uji Coba

Nomor Soal	r hitung	r tabel	p-value	Kriteria
1a	0,548	0,329	0,000	Valid
1b	0,611	0,329	0,000	Valid
2a	0,858	0,329	0,000	Valid
2b	0,854	0,329	0,000	Valid
3	0,860	0,329	0,000	Valid

Uji Reabilitas Kelas Uji Coba

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.806	.812	5

Uji Tingkat Kesukaran Soal

Uji Tingkat Kesukaran Soal			
Soal	Rata-Rata	IK	Kriteria
1a	1,444	0,722	Mudah
1b	1,472	0,736	Mudah
2a	2,361	0,590	Sedang
2b	2,306	0,576	Sedang
3	2,472	0,618	Sedang

Daya Pembeda

Daya Pembeda				
Soal	Rata-Rata Atas	Rata-Rata Bawah	DP	Kriteria
1a	1,6	0,7	0.45	Baik
1b	1,8	0,8	0.5	Baik
2a	3,9	0,8	0.775	Baik
2b	3,9	0,9	0.75	Baik Sekali
3	3,8	0,9	0.725	Baik Sekali

Lampiran 5. Data Posttest Pemahaman Konsep Matematika Siswa

Data *Posttest* Pemahaman Konsep Matematika Siswa Kelas XI IPS SMA Negeri 1 Baturiti

No	Siswa	Kode
1	I Dewa Putu Putra Pramana	**E1**
2	I Gede Putra Wisnawa	**E2**
3	I Kadek Ari Pranata	**E3**
4	I Kadek Deni Kusuma	**E4**
5	I Kadek Yudis Adi Guna Darma	**E5**
6	I Ketut Ari Sudiantara	**E6**
7	I Ketut Sandi Wiranata	**E7**
8	I Komang Kresna Tri Guna	**E8**
9	I Made Dresta Wahyu Setiawan	**E9**
10	I Made Klusa Jalarasi	**E10**
11	I Made Nata Sukrawan	**E11**
12	I Made Surya Pastika	**E12**
13	I Pande Made Egi Pramudiana	**E13**
14	I Putu Aditya Wira Sastrawan	**E14**
15	I Putu Berlian	**E15**
16	I Wayan Adi Mustika	**E16**
17	I Wayan Agus Krisna Raditya Wiputra	**E17**
18	I Wayan Edy Pradnyanata	**E18**
19	Made Narendhra Mahagupta Winarsa	**E19**
20	Ni Kadek Ana Wirayanti	**E20**
21	Ni Kadek Anastasya Yunita Maharani	**E21**
22	Ni Kadek Dewi Anjani	**E22**
23	Ni Kadek Ilda Dwi Candra	**E23**
24	Ni Kadek Rany Senja Pratiwi	**E24**
25	Ni Kadek Sovi Sapitri	**E25**
26	Ni Kadek Sri Hari Ariani	**E26**
27	Ni Ketut Sri Fitria Ramadani	**E27**
28	Ni Luh Lisa Eka Putri	**E28**
29	Ni Luh Putu Dian Kartika	**E29**
30	Ni Luh Putu Melyana Widya Artini	**E30**
31	Ni Luh Rahayuni Dewi	**E31**
32	Ni Made Dianti	**E32**
33	Ni Made Parwati	**E33**
34	Ni Made Wikayani	**E34**
35	Ni Made Wulan KusumaWardani	**E35**
36	Putu Eka Adi Darmawan	**E36**
37	Ni Kadek Dian Kusuma Dewi	**E37**

No	Kode Siswa	Kelas Eksperimen (*Posttest*)
1	E1	81
2	E2	50
3	E3	44
4	E4	94
5	E5	81
6	E6	63
7	E7	69
8	E8	81
9	E9	63
10	E10	44
11	E11	75
12	E12	81
13	E13	63
14	E14	88
15	E15	69
16	E16	56
17	E17	88
18	E18	56
19	E19	88
20	E20	81
21	E21	94

22	E22	75
23	E23	94
24	E24	88
25	E25	63
26	E26	88
27	E27	94
28	E28	75
29	E29	81
30	E30	69
31	E31	75
32	E32	69
33	E33	88
34	E34	69
35	E35	75
36	E36	94
37	E37	75

No	Siswa	Kode
1	I Gusti Ayu Made Dwi Rahayu	**K1**
2	I Gede Widiana	**K2**
3	I Gusti Ngurah Darma Ari Kencana	**K3**
4	I Kadek Arya Satrya Anggara	**K4**
5	I Kadek Parta Kesawa	**K5**
6	I Kadek Riski Raditya	**K6**
7	I Komang Adi Eka Darmawan	**K7**
8	I Komang Krisna Pana	**K8**
9	I Made Aris Adinata Astawa	**K9**
10	I Made Arya Prasetya	**K10**
11	I Made Dida Aparigraha	**K11**
12	I Made Dodi Sanjaya	**K12**
13	I Made Sueca Yasa	**K13**
14	I Putu Dananjaya Aditya Putra	**K14**
15	I Putu Nanda Nugraha Wijaksana	**K15**
16	I Wayan Andika Saputra	**K16**
17	I Wayan Wahyu Dana Arta	**K17**
18	Kadek Dheo Suputra Yadnya	**K18**
19	Lilis Aprilia Putri	**K19**
20	Ni Luh De Sintya Dewi	**K20**
21	Marcellinus Dicky Wirachris	**K21**
22	Muhammad Affadhiel Zanuary	**K22**
23	Ni Kadek Dwi Puspita Dewi	**K23**
24	Ni Kadek Nitri Asih	**K24**
25	Ni Kadek Purnama Sari	**K25**
26	Ni Komang Bintang Tri Pramita Dewi	**K26**
27	Ni Luh Indriantini	**K27**
28	Ni Luh Putu Wangi Indrayani	**K28**
29	Ni Made Dwiantari	**K29**
30	Ni Made Kharisma Diah Pratiwi	**K30**
31	Ni Made Febriyanti	**K31**
32	Ni Putu Ayu Sinta Selvitipani	**K32**
33	Ni Putu Juniari	**K33**
34	Putu Bagus Arta Wibawa	**K34**
35	Putu Diana Rahmadewi	**K35**
36	I Putu Sumitra Yasa	**K36**
37	Selsa Billa Syahrani	**K37**

No	Kode Siswa	Kelas Kontrol (*Posttest*)
1	K1	81
2	K2	38
3	K3	88
4	K4	63
5	K5	69
6	K6	56
7	K7	50
8	K8	44
9	K9	63
10	K10	63
11	K11	75
12	K12	81
13	K13	75
14	K14	63
15	K15	56
16	K16	81
17	K17	88
18	K18	50
19	K19	69
20	K20	69
21	K21	75

22	K22	75
23	K23	69
24	K24	50
25	K25	63
26	K26	88
27	K27	75
28	K28	75
29	K29	63
30	K30	88
31	K31	75
32	K32	38
33	K33	81
34	K34	56
35	K35	69
36	K36	69
37	K37	75

Lampiran 6. Hasil Uji Hipotesis

Analisis Deskriptif Kelas Kontrol dan Eksperimen

Statistik Deskriptif *Pretest* dan *Posttest* Kelas Eksperimen

Descriptive Statistics

	N	Range	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance
Kelas Kontrol	37	8	6	14	10.81	2.171	4.713
Kelas Eksperimen	37	8	7	15	12.00	2.236	5.000
Valid N (listwise)	37						

Distribusi Data Frekuensi Skor Posttest Kelas Kontrol

Kelas	Interval			Frequency	Percent	Cumulative Percent
1	38	-	45	3	8,1	8,1
2	46	-	53	3	8,1	16,2
3	54	-	61	3	8,1	24,3
4	62	-	69	12	32,4	56,8
5	70	-	77	8	21,6	78,4
6	78	-	85	4	10,8	89,2
7	86	-	93	4	10,8	100,0
Total				37	100	

Distribusi Data Frekuensi Skor Posttest Kelas Eksperimen

Kelas	Interval			Frequency	Percent	Cumulative Percent
1	44	-	51	3	8,1	8,1
2	52	-	59	2	5,4	13,5
3	60	-	67	4	10,8	24,3
4	68	-	75	11	29,7	54,1
5	76	-	83	6	16,2	70,3
6	84	-	91	6	16,2	86,5
7	92	-	99	5	13,5	100,0
Total				37	100	

Uji Normalitas

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Kelas Kontrol	.141	37	.063	.946	37	.072
Kelas Eksperimen	.132	37	.102	.937	37	.038

a. Lilliefors Significance Correction

Uji Homogenitas

Test of Homogeneity of Variances

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Jumlah Skor	Based on Mean	.023	1	72	.881
	Based on Median	.069	1	72	.793
	Based on Median and with adjusted df	.069	1	71.990	.793
	Based on trimmed mean	.056	1	72	.814

Uji Hipotesis

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Jumlah Skor	Equal variances assumed	.023	.881	2.321	72	.023	1.189	.512	.168	2.211
	Equal variances not assumed			2.321	71.937	.023	1.189	.512	.168	2.211

Lampiran 7. RPP Kelas Eksperimen

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN

(RPP) KELAS EKSPERIMEN

Sekolah : SMA Negeri 1 Baturiti

Mata Pelajaran : Matematika

Materi Pokok : Induksi Matematika

Kelas/Semester : XI/1

Alokasi Waktu : 2 JP (7 × Pertemuan)

Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
3.1 Menjelaskan metode pembuktian pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika.	3.1.1 Merancang formula untuk suatu pola barisan bilangan. 3.1.2 Menjelaskan prinsip induksi matematika. 3.1.3 Membuktikan formula suatu barisan bilangan dengan prinsip induksi matematika. 3.1.4 Membuktikan formula keterbagian bilangan dengan prinsip induksi matematika. 3.1.5 Membuktikan formula bentuk ketidaksamaan bilangan dengan prinsip induksi matematika.
4.1 Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian.	4.1.1 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebeneran formula suatu barisan bilangan. 4.1.2 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk menyelidiki kebenaran suatu formula. 4.1.3 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan keterbagian bilangan. 4.1.4 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan ketidaksamaan bilangan.
Tujuan Pembelajaran	Melalui video animasi, diskusi kelas, dan pemahaman konsep, siswa dapat: **Pertemuan 1:** 1. Merancang formula untuk suatu pola barisan bilangan. 2. Membandingkan penalaran induktif dan deduktif. **Pertemuan 2:**

	• Menjelaskan prinsip induksi matematika. • Memahami konsep dari prinsip induksi matematika. **Pertemuan 3:** • Mengidentifikasi metode pembuktian dengan induksi matematika. • Menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis. **Pertemuan 4:** • Menjelaskan penerapan induksi matematika pada rumus jumlah barisan (deret). • Menentukan prinsip induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis berupa barisan. • Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran formula suatu barisan bilangan. **Pertemuan 5:** • Menjelaskan penerapan induksi matematika pada keterbagian. • Membuktikan formula keterbagian bilangan dengan prinsip induksi matematika. • Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan keterbagian bilangan. **Pertemuan 6:** • Menjelaskan penerapan induksi matematika pada ketidaksamaan. • Membuktikan rumus ketidakamaan bilangan dengan prinsip induksi matematika. • Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan ketidaksamaan bilangan. **Pertemuan 7:** • Menentukan prinsip induksi matematika kuat. • Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan induksi matematika kuat.
Materi Pembelajaran	**(terlampir)**

E. MODEL, METODE PEMBELAJARAN

1. Model : *Flipped Classroom*
2. Pendekatan : Pembelajaran berbantuan Video animasi
3. Metode : Diskusi, Tanya jawab

F. MEDIA DAN SUMBER BELAJAR

1. Media : *Handphone, WhatsApp*
2. Sumber Belajar : Buku paket matematika kelas XI, Internet

G. KEGIATAN PEMBELAJARAN

No	Langkah-langkah *Flipped Classroom*	Pendekatan Saintifik	Kegiatan Guru	Kegiatan Siswa	Alokasi Waktu
1	Sebelum Pembelajaran Di luar kelas (siswa mencermati video yang telah disiapkan guru dan membuat pertanyaan mengenai materi yang telah dijelaskan sebelum memulai pembelajaran di kelas)	Mengamati	• Guru memberikan permasalahan melalui video animasi • Guru mengarahkan siswa untuk mencermati video dengan baik dan meminta siswa untuk mengerjakan permasalahan yang diberikan dan membuat pertanyaan terkait materi yang belum dipahami	Siswa memahami bahan belajar yang telah diberikan oleh guru di rumah dan membuat pertanyaan terkait materi yang belum di pahami	Disesuaikan dengan waktu belajar siswa
2	Saat pembelajaran Di dalam kelas	Menanya	• Guru memberikan waktu kepada siswa untuk bertanya • Guru meminta siswa untuk menyampaikan hasil pekerjaan siswa terkait dengan permasalahan yang diberikan, kemudian siswa berdiskusi untuk membahas persoalan yang diberikan	• Siswa bertanya kepada guru terkait materi yang belum dipahami dari penjelasan video yang telah diberikan • Siswa yang menjawab menuliskan di papan kemudian menjelaskan hasil dari apa yang sudah dikerjakan sedangkan siswa yang lainnya menanggapi	70 menit
		Mencoba/ Mengumpulkan informasi	• Guru memberikan latihan soal kepada siswa	• Siswa menjawab soal yang diberikan	

3	Di dalam kelas (menerapkan kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah)	Menalar	Guru mengarahkan siswa untuk memahami soal yang dikerjakan dengan melihat dari video yang sudah diberikan	Siswa menggunakan data/informasi yang sudah dikumpulkan untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan yang diberikan	
4	Di dalam kelas (mengukur pemahaman siswa)	Mengkomunikasikan	• Guru memberikan peluang kepada siswa yang ingin menjawab pertanyaan dan memberikan poin tambahan bagi siswa yang aktif • Guru mengarahkan kepada siswa lainnya untuk menanggapi jawaban dari teman yang sudah mempresentasikan jawabannya • Guru memberikan penguatan serta memberikan penjelasan/informasi lebih luas • Guru memberikan kuiz di akhir pembelajaran	• Siswa menyampaikan jawaban dari pertanyaan-pertanyaan yang diberikan • Siswa berdiskusi terkait jawaban yang sudah disampaikan • Siswa membuat kesimpulan dari pemecahan masalah yang diperoleh	
5	Setelah pembelajaran Di dalam kelas		• Guru merefleksi siswa mengenai materi yang telah dipelajari • Guru mengakhiri pembelajaran dengan mengucapkan salam	• Siswa mengulas kembali materi yang telah dipelajari • Siswa menjawab salam	10 menit

Lampiran 1. Penilaian dan Penugasan

a. Penilaian Sikap Disiplin dan Tanggungjawab

No	Nama Siswa	Disiplin dalam mengikuti pembelajaran				Mengumpulkan tugas tepat pada waktunya				Berperan aktif selama mengikuti pembelajaran				Total Skor
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
1														
2														
3														
4														
dst														

Kriteria

1 : tidak pernah
2 : sesekali
3 : jarang
4 : rajin

Keterangan nilai

A : total skor 12

B : total skor 8

C : total skor 4

D : total skor 3

b. Penilaian Pengetahuan

- Bentuk penilaian : kuis harian
- Soal, kunci jawaban dan pedoman penskoran : (terlampir)

c. Penilaian Keterampilan

No	Nama Siswa	Menjawab semua pertanyaan				Mampu memecahkan permasalahan				Menunjukkan hasil kemampuan sendiri				Total skor
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
1														
2														
3														
4														

dst													

Keterangan nilai

1 : nilai < 64
2 : nilai 74
3 : nilai 85
4 : nilai 100

Bentuk penilaian : tugas

Lampiran 2. Materi Ajar

MATERI PELAJARAN

Pengantar Induksi Matematika

- **Merancang formula untuk suatu pola barisan bilangan**
  1. Rancanglah formula yang memenuhi pola $1+2+3+...+80$
  2. Rancang formula yang memenuhi pola penjumlahan bilangan berurutan mulai 1 hingga n dengan n sebarang bilangan asli yang genap. Kemudian, uji kebenaran formula tersebut untuk menghitung $2+4+6+8+...+100$

Pembahasan:

1. $1+2+3+...+80$

   $n=80$

   $$\begin{array}{l} 1+2+3+... \\ 80+79+78+... \\ \hline 81+81+81+... \end{array} +$$

   Terdapat 81 sebanyak $\frac{n}{2}$ pasang bilangan, sehingga :

   $\frac{n}{2}\times 81 = \frac{80}{2}\times 81 = 3240$

   Jadi formula untuk pola $1+2+3+...+80$ adalah 3240

2. $2+4+6+...+2n$

   $$\begin{array}{l} 2+4+6+... \\ 2n+(2n-2)+(2n-4)+... \\ \hline (2n+2)+(2n+2)+(2n+2)+... \end{array} +$$

   Terdapat $(2n+2)$ sebanyak $\frac{n}{2}$ pasang bilangan, sehingga :

   $\frac{n}{2}\times(2n+2) = \frac{n(2n+2)}{2} = n^2 + n$

   Jadi formula untuk pola $2+4+6+...+2n$ adalah $n^2 + n$

$2+4+6+8+...+100$

$n=50$

$n^2+n=50^2+50=2550$

Jadi formula untuk $2+4+6+8+...+100$ adalah 2550.

- **Penalaran Induktif dan Deduktif**

Ada 2 cara mengambil keputusan, yaitu penalaran induktif dan deduktif. Penalaran deduktif berawal dari sesuatu yang berlaku secara umum ke sesuatu yang khusus, sedangkan penalaran induktif justru sebaliknya. Dengan penalaran induktif, siswa akan sampai pada suatu pernyataan yang dikenal dengan istilah konjektur yang belum tentu benar secara mutlak. Dengan penalaran deduktif, kebenaran yang diperoleh merupakan kebenaran mutlak.

Contoh Penalaran Induktif

Selidiki untuk bilangan n mana saja pertidaksamaan $3^n > n^3$ bernilai benar. Dengan menggunakan tabel berikut, kita akan mengecek kebenaran pertidaksamaan di atas untuk 8 bilangan asli yang pertama

n	$3^n > n^3$	**Benar/Salah**
1	$3=3^1>1^3=1$	Salah
2	$9=3^2>2^3=8$	Salah
3	$27=3^3>3^3=27$	Salah
4	$81=3^4>4^3=64$	Benar
5	$243=3^5>5^3=125$	Benar
6	$729=3^6>6^3=216$	Benar
7	$2187=3^7>7^3=343$	Benar
8	$6561=3^8>8^3=512$	Benar

Dari tabel di atas, tampak bahwa untuk $n=3$, pertidaksamaan bernilai salah. Pertidaksamaan baru bernilai benar setelah bilangan asli 4 ke atas. Dengan kegiatan penalaran induktif, dapat disimpulkan bahwa pertidaksamaan $3^n > n^3$ benar untuk semua bilangan asli n yang lebih atau sama dengan 4. Penarikan kesimpulan secara induktif yang umum ini tidak bisa diterima sebagai kebenaran mutlak di dalam matematika.

A. Pengertian Induksi Matematika

Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dalam matematika. Secara umum, induksi matematika adalah metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu. Melalui induksi matematika, kita dapat mengurangi langkah pembuktian yang sangat rumit untuk menemukan suatu kebenaran dari pernyataan matematis hanya dengan sejumlah langkah terbatas yang cukup mudah. Perlu ditekankan bahwa dengan induksi matematika kita dapat melakukan pembuktian kebenaran suatu pernyataan matematika yang berhubungan dengan bilangan asli, tetapi bukan untuk menemukan suatu formula atau rumus.

Prinsip Induksi Matematika

Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n dan misalkan pula a merupakan suatu bilangan asli tertentu. Andaikan dua pernyataan berikut bernilai benar:

3. $P(a)$ bernilai benar
4. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k+1)$ juga bernilai benar
   Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, $P(n)$ bernilai benar

Untuk memberikan gambaran tentang induksi matematika, bayangkan sebarisan kartu-kartu seperti pada gambar

Dari gambar di atas, kita gunakan dua asumsi:

1. Kartu pertama dijatuhkan
2. Jika suatu kartu dijatuhkan, maka kartu berikutya juga akan jatuh

Jika dua asumsi tersebut benar, maka seluruh kartu juga akan jatuh.

Untuk melihat hubungan hal tersebut dengan prinsip induksi matematika, kita misalkan $P(n)$ adalah kalimat "kartu ke-n akan jatuh". Ini dapat dinyatakan bahwa jika $P(1)$ benar (kartu pertama jatuh), maka untuk sebarang $k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar (kartu ke-k jatuh), maka $P(k+1)$ juga bernilai benar (kartu ke-$(k+1)$ juga jatuh). Menurut prinsip induksi matematika, maka $P(n)$, yaitu kartu ke-n jatuh juga bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$

Pembuktian Induksi Matematika

Pembuktian dengan induksi matematika terdiri dari dua langkah

- Langkah dasar (basis step)
- Langkah induktif (inductive step)

Metode Pembuktian dengan Induksi Matematika

Pandang suatu pernyataan "untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar. Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:

- Langkah dasar : akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar
- Langkah induktif : akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k+1)$ juga bernilai benar

1. Penerapan Induksi Matematika pada Rumus Jumlah Barisan (Deret)

Sebelum melakukan pembuktian jumlah barisan (deret), ada beberapa hal yang perlu kalian pahami terkait deret bilangan yaitu:

Jika $P(n) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = S_n$

Maka $P(1) = u_1 = S_1$

$P(k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k = S_k$

$P(k+1) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + u_{k+1} = S_{k+1}$

Penerapan Induksi Matematika pada Keterbagian

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada keterbagian, pelu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi.

Pernyataan Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada keterbagian, pelu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi.

Pernyataan Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada keterbagian, pelu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi.

Pernyataan "a habis dibagi b" bersinonim dengan:

- a kelipatan b
- b faktor dari a
- b membagi a

Jika p habis dibagi a dan q habis dibagi a, maka $(p+q)$ juga habis dibagi a.

Contoh: 4 habis dibago 2 dan 6 habis dibagi 2, maka (4+6) juga habis dibagi 2

Penerapan Induksi Matematika pada Ketidaksamaan

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada ketidaksamaan, kita perlu memperhatikan sifat-sifat ketidaksamaan yang sering digunakan berikut ini

Sifat transitif

- $a > b > c \Rightarrow a > c$ atau
  $a < b < c \Rightarrow a < c$

- $a < b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ atau

  $a > b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ atau
  $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Prinsip Induksi Matematika Kuat

Menurut Rosen (2012), induksi matematika kuat merupakan teknik pembuktian matematika yang serupa dengan induksi matematika biasa, yaitu suatu teknik untuk menetapkan kebenaran dari urutan pernyataan tentang bilangan bulat dan terdiri dari langkah basis, langkah induktif, dan kesimpulan. Oleh karena itu, langkah basis boleh mengandung pembuktian untuk beberapa nilai awal, dan pada langkah induktif kebenaran P(n) diasumsikan tidak hanya satu nilai n tapi untuk semua nilai menuju k, dan setelah itu kebenaran P(k + 1) terbukti.

Misalkan P(n) merupakan suatu pernyataan yang didefinisikan untuk bilangan bulat n, dan misal a dan b merupakan bilangan bulat tetap dengan a ≤ b. Anggap dua pernyataan berikut adalah benar:

1. P(a), P(a + 1), ..., dan P(b) adalah benar (langkah basis)

2. Untuk setiap bilangan bulat k ≥ b, jika P(i) benar untuk semua bilangan bulat i dari a menuju k, maka P(k + 1) adalah benar (langkah induktif)

Contoh aplikasi Prinsip Induksi Kuat adalah dalam pembuktian **Teorema Dasar Aritmetik**, Teorema Dasar Aritmetik dapat dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika, sebagai berikut: Perhatikan bahwa pernyataan teorema berlaku untuk $n = 2$. Sekarang, misalkan pernyataan berlaku untuk $n = 2$ sampai dengan $n = k$. Kita akan membuktikan bahwa pernyataan berlaku untuk $n = k + 1$. Jika $k + 1$ merupakan bilangan prima, pernyataan teorema jelas berlaku. Lalu bagaimana jika $k + 1$ merupakan bilangan komposit? Dalam hal ini, $k + 1 = ab$, dengan $1 < a \le b \le k$. Menurut pemisalan di atas, masing-masing bilangan a dan b dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima, sehingga bilangan $k + 1$ pun dapat dinyatakan sebagai hasil kali sejumlah bilangan prima. Dengan demikian, setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima. yang menyatakan bahwa setiap bilangan asli $n \geq 2$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima. Jelas bahwa pernyataan di atas benar untuk $n = 2$, karena 2 adalah bilangan prima dan $2 = 2$. Selanjutnya misalkan pernyataan benar untuk $n = 2, \ldots, k$. Kita akan menyelidiki kebenaran pernyataan untuk $n = k + 1$. Jika $k + 1$ adalah bilangan prima, maka pernyataan tentu saja benar. Jadi, misalkan $k + 1$ bukan bilangan prima. Dalam hal ini, $k + 1$ mempunyai faktor prima, sebutlah p, sehingga $k + 1 = pq$, dengan $p, q < k + 1$. Di sini q mungkin merupakan bilangan komposit, tetapi — menurut hipotesis — q dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima. Jadi, $k + 1$ pun dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Rangkuman

- Induksi matematika adalah metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu.

- Prinsip induksi matematika

  Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n dan misalkan pula a merupakan suatu bilangan asli tertentu. andaikan dua pernyataan berikut bernilai benar:

  1. $P(a)$ bernilai benar
  2. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$ jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar

  Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$ dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar. Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:

  - Langkah dasar (basis step)

    Akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar
  - Langkah induktif

    Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$ dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar

KUIS

Petunjuk:

1. Tuliskan nama, no.absen, dan kelas pada kolom yang sudah disediakan.
2. Tidak diizinkan untuk melihat HP, membuka buku, dan menyontek.
3. Baca soal dengan baik, apabila ada hal yang belum dipahami tanyakan kepada guru.

Nama :

No. absen :

Kelas :

Soal:

1. Gunakan induksi matematis untuk membuktikan kebenaran $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n
2. Dengan induksi matematika, buktikan bahwa $4n<2^n$ untuk semua bilangan asli $n\geq 5$
3. Buktikan bahwa $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$
4. Buktikan dengan induksi matematika $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+...+\frac{n}{5}=\frac{n(n+1)}{10}$
5. Buktikan bahwa $2^n>n+20$ untuk $n\geq 5$, $n\in\mathbb{N}$ adalah benar dengan induksi matematika

☺ **Selamat Bekerja** ☺

No	Jawaban yang diharapkan	Skor
1	Gunakan induksi matematis untuk membuktikan kebenaran $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n **Pembahasan :** Diketahui: $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n Ditanya: Buktikan dengan induksi matematika Jawab: Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan benar bahwa $P(n)=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n$ • Langkah dasar $P(1)$ benar, karena $1+(1-1)\cdot 2^1=1+0=1$ • Langkah induksi Untuk $n=k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli $P(k)$ adalah pernyataan $P(k)=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+k\cdot 2^{k-1}=1+(k-1)\cdot 2^k$ Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga bena $P(k+1)=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+k\cdot 2^{k-1}+(k+1)\cdot 2^{(k+1)-1}=1+((k+1)-1)\cdot 2^{k+1}$ Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+k\cdot 2^{k-1}+(k+1)\cdot 2^{(k+1)-1}=(1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+k\cdot 2^{k-1})+(k+1)\cdot 2^{(k+1)-1}$ $=(1+(k-1)\cdot 2^k)+(k+1)\cdot 2^{(k+1)-1}$ $=(1+k\cdot 2^k-2^k)+(k+1)\cdot 2^k$ $=1+k\cdot 2^k-2^k+k\cdot 2^k+2^k$ $=1+2k\cdot 2^k$ $=1+k\cdot 2^{k+1}$ $=1+((k+1)-1)\cdot 2^{k+1}$	35
2	Buktikan dengan induksi matematika $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+...+\frac{n}{5}=\frac{n(n+1)}{10}$ **Pembahasan :** Misalkan: $P(n)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+...+\frac{n}{5}=\frac{n(n+1)}{10}$ Untuk membuktikan kebenaran formula $P(n)$ memenuhi prinsip induksi matematika, kita harus melalui langkah awal dan langkah induksi • Langkah awal Untuk $n=1$ maka $P(1)=\frac{1}{5}=\frac{1(1+1)}{10}$ $\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ Jadi $P(1)$ benar	35

	• Langkah induksi Untuk $n = k$ $P(k) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + ... + \frac{k}{5} = \frac{k(k+1)}{10}$, anggap benar Selanjutnya akan ditunjukkan jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar, sehingga $P(k+1) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + ... + \frac{(k+1)}{5} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{10}$ $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + ... + \frac{(k+1)}{5} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{10}$ $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + ... + \frac{k}{5} + \frac{(k+1)}{5} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{10}$ Dari $P(k)$ kita peroleh $\frac{k(k+1)}{10} + \frac{(k+1)}{5} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{10}$ $\frac{k(k+1)+2(k+1)}{10} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{10}$ $\frac{(k+1)+(k+2)}{10} = \frac{(k+1)(k+2)}{10}, P(k+1)$ Maka formula diatas adalah benar dengan n bilangan asli	
3	Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan bahwa rumus berikut benar untuk sebarang bilangan asli n $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$ **Pembahasan :** Misalkan $P(n) = 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$ • Langkah Dasar Untuk $n = 1$ diperoleh $P(1) = 2 = 1(1+1) = 1(2) = 2$ Pernyataan benar untuk $n = 1$ • Langkah Induksi Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan $P(k) = 2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k+1)$ Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar $P(k+1) = 2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$ Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh $2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) = (2 + 4 + 6 + ... + 2k) + 2(k+1)$	30

	$= k(k+1)+2(k+1)$ $= k^2+1+2k+2$ $= k^2+2k+3$ $= (k+1)(k+2)$ Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli	

Lampiran 8. RPP KELAS KONTROL

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN

(RPP) KELAS KONTROL

Sekolah	: SMA Negeri 1 Baturiti
Mata Pelajaran	: Matematika
Materi Pokok	: Induksi Matematika
Kelas/Semester	: XI/1
Alokasi Waktu	: 2 JP (7 × Pertemuan)

Kompetensi Dasar	**Indikator Pencapaian Kompetensi**
3.1 Menjelaskan metode pembuktian pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika.	3.1.1 Merancang formula untuk suatu pola barisan bilangan. 3.1.2 Menjelaskan prinsip induksi matematika. 3.1.3 Membuktikan formula suatu barisan bilangan dengan prinsip induksi matematika. 3.1.4 Membuktikan formula keterbagian bilangan dengan prinsip induksi matematika. 3.1.5 Membuktikan formula bentuk ketidaksamaan bilangan dengan prinsip induksi matematika.
4.1 Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian.	4.1.1 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebeneran formula suatu barisan bilangan. 4.1.2 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk menyelidiki kebenaran suatu formula. 4.1.3 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan keterbagian bilangan. 4.1.4 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan ketidaksamaan bilangan.
Tujuan Pembelajaran	Melalui video animasi, diskusi kelas, dan pemahaman konsep, siswa dapat: **Pertemuan 1:** 3. Merancang formula untuk suatu pola barisan bilangan. 4. Membandingkan penalaran induktif dan deduktif. **Pertemuan 2:**

	• Menjelaskan prinsip induksi matematika. • Memahami konsep dari prinsip induksi matematika. **Pertemuan 3:** • Mengidentifikasi metode pembuktian dengan induksi matematika. • Menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis. **Pertemuan 4:** • Menjelaskan penerapan induksi matematika pada rumus jumlah barisan (deret). • Menentukan prinsip induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis berupa barisan. • Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran formula suatu barisan bilangan. **Pertemuan 5:** • Menjelaskan penerapan induksi matematika pada keterbagian. • Membuktikan formula keterbagian bilangan dengan prinsip induksi matematika. • Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan keterbagian bilangan. **Pertemuan 6:** • Menjelaskan penerapan induksi matematika pada ketidaksamaan. • Membuktikan rumus ketidakamaan bilangan dengan prinsip induksi matematika. • Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan ketidaksamaan bilangan. **Pertemuan 7:** • Menentukan prinsip induksi matematika kuat. • Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan induksi matematika kuat.
Materi Pembelajaran	**(terlampir)**

E. MODEL, METODE PEMBELAJARAN

4. Model : *Cooperative*
5. Pendekatan : Ekspositori
6. Metode : Ceramah, Diskusi, Tanya jawab, kerja kelompok

F. MEDIA DAN SUMBER BELAJAR

3. Media : Papan tulis, Spidol, Penghapus papan.
4. Sumber Belajar : Buku paket matematika kelas XI, Internet.

G. KEGIATAN PEMBELAJARAN

PERTEMUAN 1:

No	Langkah-langkah	Kegiatan Guru	Kegiatan Siswa	Waktu
1	Pendahuluan	• Guru membuka pembelajaran dengan salam pembuka. • Guru menanyakan bagaimana kabar siswa. • Guru melakukan absensi. • Guru melakukan doa bersama.	• Siswa menjawab salam. • Siswa dengan semangat menjawab kabar mereka baik. • Siswa mendengarkan dan menaikkan tangan ketika nama mereka disebutkan.	10 menit
2	Kegiatan Inti			
	Fase 1 (Menyampaikan tujuan dan memotivasi siswa)	• Guru menyampaikan semua tujuan pembelajaran yang ingin dicapai pada pembelajaran tersebut dan memotivasi siswa belajar.	• Ketua kelas mempimpin jalannya doa. • Siswa menyimak terkait tujuan pembelajaran yang di sampaikan	70 menit
	Fase 2 (Menyajikan informasi)	• Guru menyampaikan materi dengan cara menuliskan poin-poin penting di papan tulis dan menjelaskan cara penyelesaian dari beberapa contoh soal.	• Siswa mendengarkan penjelasan dari guru dan mencatat hal-hal yang penting.	
	Fase 3 (Mengorganisasi siswa ke dalam kelompok belajar)	• Guru mengarahkan siswa untuk membuat	• Siswa membentuk kelompok sesuai	

		kelompok secara heterogen dengan jumlah kelompok 4-5 orang. • Setelah siswa membentuk kelompok, guru membagikan lembar soal yang akan dikerjakan siswa bersama dengan kelompoknya.	arahan dari guru. • Siswa mencermati lembar yang diberikan dan membaca petunjuk pengerjaan soal.	
	Fase 4 (Membimbing kelompok belajar dan bekerja)	• Guru membimbing kelompok belajar pada saat mereka mengerjakan tugas.	• Siswa mengerjakan lembar soal yang diberikan, apabila ada hal yang belum dipahami dari soal siswa bertanya kepada guru.	
	Fase 5 (Evaluasi)	• Guru mengevaluasi hasil belajar dengan meminta masing-masing kelompok mempresentasikan hasil kerjanya dan untuk kelompok yang tidak presentasi untuk menyimak dan menyiapkan pertanyaan untuk kelompok yang presentasi.	• Siswa mempersiapkan diri untuk presentasi dan siswa lainnya memperhatikan kelompok yang sedang presentasi dan menyiapkan pertanyaan.	
	Menyimpulkan	• Guru mengarahkan siswa untuk membuat kesimpulan dari apa yang telah dipelajari dengan kata-katanya sendiri.	• Siswa menyimpulkan dari materi yang telah dipelajari.	
	Mengaplikasikan	• Guru meminta siswa untuk kembali ke tempat duduknya masing-masing • Guru memberikan kuis untuk dikerjakan siswa secara individu	• Siswa kembali ke tempat duduknya msing-masing dengan tertib. • Siswa mengerjakan kuis yang diberikan guru.	

	Fase 6 (Memberikan penghargaan)	• Guru mengumumkan siswa yang mendapatkan poin tambahan karena selama proses pembelajaran berperan aktif	• Siswa menjadi lebih semangat dan termotivasi untuk lebih berperan aktif lagi dalam proses pembelajaran.	
3	Penutup	• Guru memberitahukan materi yang akan dibahas pada pertemuan selanjutnya • Guru mengakhiri pembelajaran dengan mengucapkan salam	• Siswa mencatat untuk bisa dipelajari dan lebih menyiapkan diri pada pertemuan selanjutnya. • Siswa menjawab salam.	10 menit

Lampiran 1. Penilaian dan Penugasan

A. Penilaian Sikap Disiplin dan Tanggungjawab

No	Nama Siswa	Disiplin dalam mengikuti pembelajaran				Mengumpulkan tugas tepat pada waktunya				Berperan aktif selama mengikuti pembelajaran				Total Skor
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
1														
2														
3														
4														
dst														

Kriteria

5 : tidak pernah
6 : sesekali
7 : jarang
8 : rajin

Keterangan nilai

A : total skor 12

B : total skor 8

C : total skor 4

D : total skor 3

B. Penilaian Pengetahuan

- Bentuk penilaian : lembar kerja siswa
- Soal, kunci jawaban dan pedoman penskoran : (terlampir)

C. **Penilaian Keterampilan**

No	Nama Siswa	Menjawab semua pertanyaan				Mampu memecahkan permasalahan				Menunjukkan hasil kemampuan sendiri				Total skor
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
1														
2														
3														
4														
dst														

Keterangan nilai

5 : nilai < 64
6 : nilai 74
7 : nilai 85
8 : nilai 100

Bentuk penilaian : latihan soal

Lampiran 2. Materi Ajar

MATERI PELAJARAN

Pengantar Induksi Matematika

- **Merancang formula untuk suatu pola barisan bilangan**
  3. Rancanglah formula yang memenuhi pola $1+2+3+...+80$
  4. Rancang formula yang memenuhi pola penjumlahan bilangan berurutan mulai 1 hingga n dengan n sebarang bilangan asli yang genap. Kemudian, uji kebenaran formula tersebut untuk menghitung $2+4+6+8+...+100$

Pembahasan:

3. $1+2+3+...+80$
   $n=80$

$1+2+3+...$

$80+79+78+...$

$\overline{81+81+81+...} \quad +$

Terdapat 81 sebanyak $\frac{n}{2}$ pasang bilangan, sehingga :

$\frac{n}{2}\times 81=\frac{80}{2}\times 81=3240$

Jadi formula untuk pola $1+2+3+...+80$ adalah 3240

4. $2+4+6+...+2n$

$2+4+6+...$

$2n+(2n-2)+(2n-4)+...$

$\overline{(2n+2)+(2n+2)+(2n+2)+...} \quad +$

Terdapat $(2n+2)$ sebanyak $\frac{n}{2}$ pasang bilangan, sehingga :

$\frac{n}{2}\times(2n+2)=\frac{n(2n+2)}{2}=n^2+n$

Jadi formula untuk pola $2+4+6+...+2n$ adalah n^2+n

$2+4+6+8+...+100$

$n=50$

$n^2+n=50^2+50=2550$

Jadi formula untuk $2+4+6+8+...+100$ adalah 2550.

Penalaran Induktif dan Deduktif

Ada 2 cara mengambil keputusan, yaitu penalaran induktif dan deduktif. Penalaran deduktif berawal dari sesuatu yang berlaku secara umum ke sesuatu yang khusus, sedangkan penalaran induktif justru sebaliknya. Dengan penalaran induktif, siswa akan sampai pada suatu pernyataan yang dikenal dengan istilah konjektur yang belum tentu benar secara mutlak. Dengan penalaran deduktif, kebenaran yang diperoleh merupakan kebenaran mutlak.

Contoh Penalaran Induktif

Selidiki untuk bilangan n mana saja pertidaksamaan $3^n > n^3$ bernilai benar. Dengan menggunakan tabel berikut, kita akan mengecek kebenaran pertidaksamaan di atas untuk 8 bilangan asli yang pertama

n	$3^n > n^3$	**Benar/Salah**
1	$3=3^1>1^3=1$	Salah
2	$9=3^2>2^3=8$	Salah
3	$27=3^3>3^3=27$	Salah
4	$81=3^4>4^3=64$	Benar
5	$243=3^5>5^3=125$	Benar
6	$729=3^6>6^3=216$	Benar
7	$2187=3^7>7^3=343$	Benar
8	$6561=3^8>8^3=512$	Benar

Dari tabel di atas, tampak bahwa untuk $n = 3$, pertidaksamaan bernilai salah. Pertidaksamaan baru bernilai benar setelah bilangan asli 4 ke atas. Dengan kegiatan penalaran induktif, dapat disimpulkan bahwa pertidaksamaan $3^n > n^3$ benar untuk semua bilangan asli n yang lebih atau sama dengan 4. Penarikan kesimpulan secara induktif yang umum ini tidak bisa diterima sebagai kebenaran mutlak di dalam matematika.

B. Pengertian Induksi Matematika

Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dalam matematika. Secara umum, induksi matematika adalah metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu. Melalui induksi matematika, kita dapat mengurangi langkah pembuktian yang sangat rumit untuk menemukan suatu kebenaran dari pernyataan matematis hanya dengan sejumlah langkah terbatas yang cukup mudah. Perlu ditekankan bahwa dengan induksi matematika kita dapat melakukan pembuktian kebenaran suatu pernyataan matematika yang berhubungan dengan bilangan asli, tetapi bukan untuk menemukan suatu formula atau rumus.

Prinsip Induksi Matematika

Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n dan misalkan pula a merupakan suatu bilangan asli tertentu. Andaikan dua pernyataan berikut bernilai benar:

5. $P(a)$ bernilai benar
6. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k+1)$ juga bernilai benar

   Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, $P(n)$ bernilai benar

Untuk memberikan gambaran tentang induksi matematika, bayangkan sebarisan kartu-kartu seperti pada gambar

Dari gambar di atas, kita gunakan dua asumsi:

3. Kartu pertama dijatuhkan
4. Jika suatu kartu dijatuhkan, maka kartu berikutya juga akan jatuh

Jika dua asumsi tersebut benar, maka seluruh kartu juga akan jatuh.

Untuk melihat hubungan hal tersebut dengan prinsip induksi matematika, kita misalkan $P(n)$ adalah kalimat "kartu ke-n akan jatuh". Ini dapat dinyatakan bahwa jika $P(1)$ benar (kartu pertama jatuh), maka untuk sebarang $k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar (kartu ke-k jatuh), maka $P(k+1)$ juga bernilai benar (kartu ke-$(k+1)$ juga jatuh). Menurut prinsip induksi matematika, maka $P(n)$, yaitu kartu ke-n jatuh juga bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$

Pembuktian Induksi Matematika

Pembuktian dengan induksi matematika terdiri dari dua langkah

- Langkah dasar (basis step)
- Langkah induktif (inductive step)

Metode Pembuktian dengan Induksi Matematika

Pandang suatu pernyataan "untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar. Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:

- Langkah dasar : akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar
- Langkah induktif : akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$,dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k+1)$ juga bernilai benar

2. **Penerapan Induksi Matematika pada Rumus Jumlah Barisan (Deret)**
   Sebelum melakukan pembuktian jumlah barisan (deret), ada beberapa hal yang perlu kalian pahami terkait deret bilangan yaitu:

   Jika $P(n) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = S_n$

   Maka $P(1) = u_1 = S_1$

   $P(k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k = S_k$

   $P(k+1) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + u_{k+1} = S_{k+1}$

Penerapan Induksi Matematika pada Keterbagian

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada keterbagian, pelu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi.

Pernyataan Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada keterbagian, pelu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi.

Pernyataan Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada keterbagian, pelu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi.

Pernyataan "a habis dibagi b" bersinonim dengan:

- a kelipatan b
- b faktor dari a
- b membagi a

Jika p habis dibagi a dan q habis dibagi a, maka $(p+q)$ juga habis dibagi a.

Contoh: 4 habis dibagi 2 dan 6 habis dibagi 2, maka (4+6) juga habis dibagi 2

Penerapan Induksi Matematika pada Ketidaksamaan

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada ketidaksamaan, kita perlu memperhatikan sifat-sifat ketidaksamaan yang sering digunakan berikut ini

Sifat transitif

- $a > b > c \Rightarrow a > c$ atau
  $a < b < c \Rightarrow a < c$

- $a < b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ atau
  $a > b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ atau
  $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Prinsip Induksi Matematika Kuat

Menurut Rosen (2012), induksi matematika kuat merupakan teknik pembuktian matematika yang serupa dengan induksi matematika biasa, yaitu suatu teknik untuk menetapkan kebenaran dari urutan pernyataan tentang bilangan bulat dan terdiri dari langkah basis, langkah induktif, dan kesimpulan. Oleh karena itu, langkah basis boleh mengandung pembuktian untuk beberapa nilai awal, dan pada langkah induktif kebenaran P(n) diasumsikan tidak hanya satu nilai n tapi untuk semua nilai menuju k, dan setelah itu kebenaran P(k + 1) terbukti.

Misalkan P(n) merupakan suatu pernyataan yang didefinisikan untuk bilangan bulat n, dan misal a dan b merupakan bilangan bulat tetap dengan a ≤ b. Anggap dua pernyataan berikut adalah benar:

1. P(a), P(a + 1), ..., dan P(b) adalah benar (langkah basis)

2. Untuk setiap bilangan bulat k ≥ b, jika P(i) benar untuk semua bilangan bulat i dari a menuju k, maka P(k + 1) adalah benar (langkah induktif)

Contoh aplikasi Prinsip Induksi Kuat adalah dalam pembuktian **Teorema Dasar Aritmetik**, Teorema Dasar Aritmetik dapat dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika, sebagai berikut: Perhatikan bahwa pernyataan teorema berlaku untuk $n = 2$. Sekarang, misalkan pernyataan berlaku untuk $n = 2$ sampai dengan $n = k$. Kita akan membuktikan bahwa pernyataan berlaku untuk $n = k + 1$. Jika $k + 1$ merupakan bilangan prima, pernyataan teorema jelas berlaku. Lalu bagaimana jika $k + 1$ merupakan bilangan komposit? Dalam hal ini, $k + 1 = ab$, dengan $1 < a \leq b \leq k$. Menurut pemisalan di atas, masing-masing bilangan a dan b dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima, sehingga bilangan $k + 1$ pun dapat dinyatakan sebagai hasil kali sejumlah bilangan prima. Dengan demikian, setiap bilangan asli $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima. yang menyatakan bahwa setiap bilangan asli $n \geq 2$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima. Jelas bahwa pernyataan di atas benar untuk $n = 2$, karena 2 adalah bilangan prima dan $2 = 2$. Selanjutnya misalkan pernyataan benar untuk $n = 2, \ldots, k$. Kita akan menyelidiki kebenaran pernyataan untuk $n = k + 1$. Jika $k + 1$ adalah bilangan prima, maka pernyataan tentu saja benar. Jadi, misalkan $k + 1$ bukan bilangan prima. Dalam hal ini, $k + 1$ mempunyai faktor prima, Dalam hal ini, $k + 1$ mempunyai faktor prima, sebutlah p, sehingga $k + 1 = pq$, dengan $p, q < k + 1$. Di sini q mungkin merupakan bilangan komposit, tetapi — menurut hipotesis — q dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima. Jadi, $k + 1$ pun dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Rangkuman

- Induksi matematika adalah metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu.
- Prinsip induksi matematika
  Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n dan misalkan pula a merupakan suatu bilangan asli tertentu. andaikan dua pernyataan berikut bernilai benar:
  1. $P(a)$ bernilai benar
  2. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$ jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar

  Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$ dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar. Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:

- Langkah dasar (basis step)
  Akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar
- Langkah induktif
  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$ dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar

Lembar Kerja Siswa (LKS)

Anggota Kelompok:

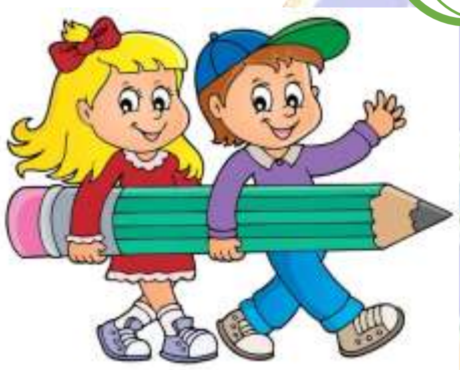
1.

2.

3.

4.

5.



Petunjuk Kerja

1. Tulislah daftar anggota kelompok masing-masing dalam tempat yang sudah disediakan.
2. Bacalah masalah yang ada dalam LKS secara seksama.
3. Jawab dan diskusikanlah masalah-masalah yang diberikan bersama kelompokmu.
4. Tanyakan pada guru jika terdapat hal-hal yang belum dipahami.
5. Waktu diskusi adalah 30 menit.

Masalah

1. Dengan induksi matematika buktikan pernyataan matematis berikut

   $$3+3^3+3^5+...+3^{2n-1}=\frac{3}{8}(9^n-1)$$

2. Dengan induksi matematika buktikan pernyataan matematis berikut

   $$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-...-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

3. Buktikan hasil rumus tersebut dengan induksi matematika

   $$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{2n(n+1)}$$

No	Jawaban yang diharapkan	Skor
1	Dengan induksi matematika buktikan pernyataan matematis berikut $3+3^3+3^5+...+3^{2n-1}=\frac{3}{8}(9^n-1)$ **Pembahasan :** Misalkan $P(n)$ adalah proposisi berikut: $P(n): 3+3^3+3^5+...+3^{2n-1}=\frac{3}{8}(9^n-1)$ Pada langkah basis induksi, untuk $n=1$ maka $P(n)$ kita peroleh $P(1): 3=\frac{3}{8}(9^1-1)$ $P(1): 3=3$ Kita coba untuk $n=2$ maka $P(n)$ kita peroleh $P(2): 3+3^3=\frac{3}{8}(9^2-1)$ $P(2): 3+27=\frac{3}{8}(80)$ $P(2): 30=30$ Kita coba untuk $n=3$ maka $P(n)$ kita peroleh	35

$P(3): 3+3^3+3^5 = \frac{3}{8}(9^3-1)$

$P(3): 3+27+273 = \frac{3}{8}(728)$

$P(3): 273 = 273$

Karena pernyataan $P(n)$ benar untuk $n=1,2,3$ selanjutnya kita anggap pernyataan $P(n)$ benar untuk $n=k$ sehingga berlaku:

$$3+3^3+3^5+...+3^{2k-1} = \frac{3}{8}(9^k-1)$$

Selanjutnya kita masuk pada langkah induksi. Akan ditunjukkan pernyataan $P(n)$ benar untuk $n=k+1$ yaitu berlaku:

$$3+3^3+3^5+...+3^{2k-1}+3^{2(k+1)-1} = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$3+3^3+3^5+...+3^{2k-1}+3^{2(k+1)-1} = \frac{3}{8}(9^{k+1)}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^k-1)+3^{2(k+1)-1} = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^k-1)+3^{2k+2-1} = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^k-1)+3^{2k+1} = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^k-1)+3^{2k}\cdot 3 = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^k-1)+\frac{3}{8}\cdot 8\cdot 3^{2k} = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^k-1+8\cdot 3^{2k}) = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^k-1+8(3^2)^k) = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^k+8\cdot 9^k-1) = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}((1+8)\cdot 9^k-1) = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9\cdot 9^k-1) = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

$$\frac{3}{8}(9^{k+1}-1) = \frac{3}{8}(9^{k+1}-1)$$

Sampai tahap ini kita telah memperoleh bukti untuk $n=k+1$ bahwa $P(n)$ juga benar

Karena untuk $n=1,2,3$, $n=k$, dan $n=k+1$ bahwa $P(n)$ benar maka

	$3+3^3+3^5+...+3^{2n-1}=\frac{3}{8}(9^n-1)$ adalah berlaku benar (terbukti)	
2	Dengan induksi matematika buktikan pernyataan matematis berikut $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-...-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$ **Pembahasan :** $P(n):\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-...-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$ Pada langkah basis induksi untuk $n=1$ maka $P(n)$ kita peroleh $P(1):\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$ $P(1):\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ Kita coba untuk $n=2$ maka $P(n)$ kita peroleh $P(2):\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ $P(2):\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ $P(2):\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ Kita coba untuk $n=3$ maka $P(n)$ kita peroleh $P(3):\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$ $P(3):\frac{4}{8}-\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$ $P(3):\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$ Karena pernyataan $P(n)$ benar untuk $n=1,2,3$ selanjutnya kita anggap pernyataan $P(n)$ benar untuk $n=k$ sehingga berlaku: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-...-\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^k}$ Selanjutnya kita masuk pada langkah induksi. Akan ditunjukkan pernyataan $P(n)$ benar untuk $n=k+1$ yaitu berlaku:	30

	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-...-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-...-\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}$ $\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}$ $\frac{1\cdot 2}{2^k\cdot 2}-\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}$ $\frac{2}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}$ $\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}$ Sampai tahap ini kita telah memperoleh bukti untuk $n=k+1$ bahwa $P(n)$ juga benar Karena untuk $n=1,2,3$, $n=k$, dan $n=k+1$ bahwa $P(n)$ benar maka $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-...-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$ adalah berlaku benar (terbukti)	
3	Buktikan hasil rumus tersebut dengan induksi matematika $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{2n(n+1)}$ **Pembahasan :** $S(n)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{2n(n+1)}$ Langkah pertama: Untuk beberapa penjumlahan n dari pertama benar bahwa $S(1)=\frac{1}{4}=\frac{1^2}{2(1)(1+1)}$ $=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ $S(2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{2^2}{2(2)(2+1)}$ $=\frac{4}{12}=\frac{4}{12}$	35

$$S(3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3^2}{2(3)(3+1)}$$

$$=\frac{9}{24}=\frac{9}{24}$$

Langkah kedua

Andaikan benar untuk $n=k$ yaitu

$S(k)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{k^2}{2k(k+1)}$ maka akan dibuktikan

Benar pula untuk $n=k+1$, yaitu

$S(k+1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)((k+1)+1)}=\frac{(k+1)^2}{2(k+1)[(k+1)+1]}$ Sekarang sederhanakan persamaan pada sisi kiri dengan mengingat bahwa

$\frac{k^2}{2k(k+1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{2k(k+1)}$ sesuai dengan pengandaian awal

$$\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{2k(k+1)}\right]+\frac{1}{2(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{k^2}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)[(k+1)+1]}$$

Kemudian padankan bentuk sederhana tadi dengan sebelah kanan

$$\frac{k^2}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)((k+1)+1)}=\frac{(k+1)^2}{2(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$\frac{k^2}{2k(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{2(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$\frac{k^2(k+2)+k}{2k(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{2(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$\frac{k(k^2+2k+1)}{2k(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{2(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$\frac{(k+1)^2}{2(k+1)[(k+1)+1]}=\frac{(k+1)^2}{2(k+1)[(k+1)+1]}$$

Jadi $S(n)$ benar untuk hipotesis induksi matematika karena memenuhi kedua langkah pembuktian

Lampiran 9. Surat Pelaksanaan Penelitian

PEMERINTAH PROVINSI BALI
DINAS PENDIDIKAN, KEPEMUDAAN DAN OLAHRAGA
SMA NEGERI 1 BATURITI
Alamat: Perean, Baturiti, Tabanan
Telp. (03682301064), Email : sman1baturiti@gmail.com

SURAT KETERANGAN
Nomor : B.31.424/922/SMA Negeri 1 Baturiti/DIKPORA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Drs. I Wayan Wardana Yasa., M.Pd
NIP	: 19670727 199802 1 005
Pangkat/Golongan	: Pembina Tk.I
Jabatan	: Kepala SMA Negeri 1 Baturiti

Dengan ini menerangkan bahwa

Nama	: Ni Putu Nina Indriana Dewi
NIM	: 1813011051
Program Studi	: S1- Pendidikan Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas	: Pendidikan Ganesha Singaraja.

Telah selesai melaksanakan penelitian di Instansi kami mulai dari tanggal, 18 Juli s/d 15 Agustus 2022.

Demikian Surat Keterangan ini kami buat dengan sebenarnya untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Baturiti, 16 Agustus 2022

Ditandatangani secara elektronik oleh :
KEPALA SEKOLAH
Drs. I Wayan Wardana Yasa, M.Pd
NIP. 19670727 199802 1 005

Balai Sertifikasi Elektronik
Dokumen ini telah ditandatangani secara elektronik menggunakan sertifikat elektronik yang diterbitkan oleh BSrE

Lampiran 10. Dokumentasi Kegiatan Penelitian

Dokumentasi Kegiatan Penelitian