BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konfigurasi simpul (*nodes*) dan ikatan (*connections*) terjadi dalam keragaman aplikasi yang sangat besar (Gross, Yellen, & Anderson, 2018). Bagaimana cara kita memasang kabel dengan biaya minimum untuk membuat setiap telepon dapat dijangkau satu sama lain? Apa rute tercepat dari ibu kota negara menuju ibu kota negara bagian? Bagaimana n pekerjaan bisa diisi oleh n orang dengan total utilitas maksimum? Berapakah aliran maksimum per satuan waktu dari sumber air ke wastafel dalam jaringan pipa? Bagaimana musim liga olahraga bisa dijadwalkan ke dalam jumlah minggu minimum? Dalam urutan apa seharusnya seorang penjual keliling (*traveling salesman*) mengunjungi kota-kota untuk meminimalkan waktu perjalanan? Bisakah kita mewarnai wilayah-wilayah dari setiap peta menggunakan empat warna sehingga wilayah-wilayah yang berdekatan menerima warna yang berbeda? Masalah tersebut dan masalah praktis lainnya melibatkan salah satu bidang dalam matematika, yaitu teori graf (West, 2001).

Teori graf berkaitan dengan studi tentang graf. Graf terdiri dari himpunan titik (*vertex*) dan sisi (*edge*), yang mana setiap sisi menggabungkan dua titik. Pada Rahman (2017), dijelaskan bahwa biasanya objek direpresentasikan dengan titik, sedangkan hubungan antara dua objek direpresentasikan dengan sisi. Rahman menyimpulkan bahwa sebuah graf dapat digunakan untuk menggambarkan informasi apa pun yang dapat dimodelkan sebagai objek dan hubungan antara objek-objek tersebut.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Euler pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berjudul "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" (Solusi masalah yang berkaitan dengan geometri posisi) mengenai penyelesaian teka-teki tujuh jembatan Königsberg (Biggs, Lloyd, & Wilson, 1986). Dickson (2006) memaparkan bahwa penduduk kota penasaran apakah mungkin meninggalkan rumah, menyeberangi masing-masing dari tujuh jembatan tersebut tepat satu kali, dan kembali ke tempat asal. Euler mengungkapkan bahwa tidak mungkin seseorang bisa melalui ketujuh jembatan itu, masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Beliau juga memberikan metode umum untuk menyelesaikan masalah sejenisnya. Model matematika yang dibangun dikenal sebagai model graf dari masalah tersebut. Berawal dari pemecahan masaah ini, banyak peneliti yang tertarik untuk mengembangkan teori graf untuk pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan, yaitu dengan adanya pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan pada suatu graf didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan titik atau sisi, atau keduanya, ke suatu kondisi tertentu (Gallian, 2018). Adapun survey terkait pelabelan graf yang telah dilakukan terdapat pada artikel "A *dynamic survey of graph labeling*" oleh Gallian (2018). Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan pada pertengahan tahun 1960-an, serta kebanyakan studi terkait mengacu pada penelitian Rosa (1967) atau yang diberikan oleh Graham & Sloane (1980). Pelabelan dibedakan menjadi pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*) dan pelabelan rotal (*total labelling*). Aplikasi pelabelan graf telah dimanfaatkan dalam berbagai bidang keilmuan seperti teori *coding*, kristalografi sinar-x, radar, astronomi, desain sirkuit, pengalamatan jaringan komunikasi, manajemen basis data (Prasanna, 2014).

Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan anti ajaib (*antimagic labeling*) yang diperkenalkan oleh Hartsfield & Ringel (1990). Sebuah graf dengan q sisi disebut anti ajaib jika sisi-sisinya bisa dilabeli dengan $1, 2, 3, \ldots, q$ tanpa pengulangan, sedemikian sehingga jumlah label sisi-sisi yang terkait (*incidence*) dengan setiap titik berbeda (Bača, dkk., 2019). Survei terkini terkait pelabelan anti ajaib juga dipaparkan dalam artikel yang ditulis oleh Gallian (2018).

Konsep pewarnaan graf secara alamiah muncul dari aplikasinya dalam pewarnaan peta: diberikan sebuah peta yang berisi beberapa negara, kita ingin mewarnai negara-negara dalam peta sedemikian rupa sehingga negara-negara yang bertetangga memiliki warna yang berbeda (Rahman, 2017). Selain pewarnaan peta, aplikasi pewarnaan graf telah banyak digunakan di bidang-bidang lain, seperti penyusunan jadwal perkuliahan oleh Daswa & Riyadi (2017). Terdapat beberapa jenis pewarnaan, yaitu pewarnaan titik, sisi dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan pada suatu graf erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik yaitu menentukan banyak warna minimum yang diperlukan sehingga syarat pewarnaannya terpenuhi.

Salah satu jenis pewarnaan graf adalah pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*). Sebuah graf G terhubung dan berwarna sisi disebut terhubung pelangi (*rainbow connected*) jika untuk setiap dua titik terhubung oleh lintasan pelangi (*rainbow path*), yaitu sebuah lintasan yang sisi-sisinya memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan sisi demikian bisa disebut dengan pewarnaan pelangi. Bilangan hubungan pelangi (*rainbow connection number*) dari graf G, yang disimbolkan dengan $rc(G)$, adalah banyak warna minimum yang digunakan untuk membuat G terhubung pelangi. Dalam konsep pewarnaan pelangi, warna pada sisi-sisi yang berdekatan tidak harus berbeda layaknya pewarnaan sisi dari suatu graf yang dijelaskan sebelumnya. Survei terkini terkait penelitian dalam bidang ini dan artikel-artikel yang telah diterbitkan dalam jurnal terdapat pada tulisan "*An updated survey on rainbow connections of graphs - a dynamic survey*" oleh Li, dkk. (2017).

Sulistiyono, dkk. (2020) dan Jabbar, dkk. (2020) memperkenalkan topik baru yang merupakan hasil perluasan dari pewarnaan pelangi dan pelabelan anti ajaib, yaitu pewarnaan anti ajaib pelangi (*rainbow antimagic coloring*). Berdasarkan kedua artikel tersebut, misalkan G merupakan sebuah graf terhubung dan sederhana dengan p titik, yang diberikan suatu fungsi pelabelan bijektif f dari himpunan titik $V(G)$ menuju himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$. Fungsi f disebut pelabelan anti ajaib pelangi jika untuk setiap dua sisi uv dan $u'v'$ dalam lintasan $x - y$, $w(uv) \neq w(u'v')$, di mana $w(uv) = f(u) + f(v)$ dan $x, y \in V(G)$. Graf G merupakan sebuah hubungan anti ajaib pelangi jika G mempunyai pelabelan anti ajaib pelangi. Dengan demikian, setiap pelabelan anti ajaib pelangi menginduksi sebuah pewarnaan pelangi pada G, di mana sisi uv ditetapkan dengan warna $w_f(uv)$, yang selanjutnya disebut dengan pewarnaan anti ajaib pelangi. Bilangan hubungan anti ajaib pelangi (*rainbow antimagic connection number*), yang disimbolkan dengan $rac(G)$, adalah banyak warna minimum yang diambil dari semua pewarnaan pelangi yang diinduksi oleh pelabelan anti ajaib pelangi pada G.

Adapun penelitian sebelumnya terkait mencari bilangan hubungan anti ajaib pelangi dari beberapa graf, di antaranya: (1) Sulistiyono, dkk. (2020) meneliti graf tangga, tangga segitiga, dan berlian; (2) Jabbar, dkk. (2020) merumuskan rac pada graf buku segitiga, buku, dan generalisasi dari graf buku; (3) Septory, dkk. (2021) meneliti graf jahangir, lemon, petasan, bipartit lengkap, dan bintang ganda; (4) Serta Budi, dkk. (2021) menemukan rac pada graf lolipop dan buku bertumpuk. Budi, dkk. (2021) menyatakan sebuah masalah terbuka sebagai berikut.

Masalah terbuka 1.1 Tentukan nilai eksak dari bilangan hubungan anti ajaib pelangi pada graf reguler, graf unisiklik, atau beberapa operasi graf.

Beberapa peneliti telah menuliskan hasil penelitian terkait masalah tersebut, tetapi masih sedikit. Oleh karena itu, rencana penelitian ini akan bertujuan untuk melakukan menjawab secara parsial masalah terbuka tersebut, yakni menentukan nilai eksak dari bilangan hubungan anti ajaib pelangi pada graf k-partit lengkap $K_{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_k}$ sebagai perluasan dari graf regular, serta graf siklus *comb* lintasan $C_n \rhd_o P_m$ sebagai graf *unicylic* dan hasil operasi graf. Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, penulis merumuskan penelitian dengan judul **"Pewarnaan Anti Ajaib Pelangi Pada Graf k-Partit Lengkap dan Graf Siklus *Comb* Lintasan"**.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah berapa nilai eksak bilangan hubungan anti ajaib pelangi pada graf k-partit lengkap $K_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$ dan graf siklus *comb* lintasan $C_n \rhd_o P_m$?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari permasalahan yang luas, maka permasalahan dalam penelitian ini akan dibatasi oleh graf-graf yang akan diteliti saja. Semua graf dalam penelitian ini merupakan graf terhubung, tidak berarah, dan sederhana. Adapun beberapa jenis graf yang akan diteliti, yaitu sebagai berikut.

1. Graf k-partit lengkap $K_{p_1,p_2,\dots,p_k}$, untuk $k \geq 3$ dan $2 \leq p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_k$.
2. graf siklus *comb* lintasan $C_n \rhd_o P_m C_n \rhd_o P_m$, untuk $n \geq 4$, $m \geq 2$, dan o adalah titik berderajat 1 di P_m.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diajukan, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji berapa nilai eksak bilangan hubungan anti ajaib pelangi pada graf k-partit lengkap $K_{p_1,p_2,\dots,p_k}$ dan graf siklus *comb* lintasan $C_n \rhd_o P_m$.

1.5 Manfaat Penelitian

1.5.1 Manfaat Teoritis

Dapat memberikan sumbangsih pemikiran, menambah kasanah ilmu pengetahuan pada bidang matematika khususnya pada pewarnaan dan pelabelan graf, sekaligus menjawab secara parsial atas masalah terbuka 1 yang terdapat pada jurnal dengan judul "*On rainbow antimagic coloring of some special graph*" yang disusun oleh Jabbar, dkk. (2020) serta dipublikasikan pada *Journal of Physics: Conference Series*.

1.5.2 Manfaat Praktis

a. Bagi Peneliti

Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan terkait pewarnaan dan pelabelan graf khususnya pewarnaan pelangi antiajaib, serta mendapatkan pengalaman dalam melaksanakan penelitian dan menyusun karya ilmiah, serta dapat mengaplikasikan ilmu matematika yang telah dipelajari.

b. Bagi Pembaca

Menambah wawasan dan referensi pembaca mengenai pelabelan graf khususnya mengenai kekuatan ketidakteraturan modular serta dapat dijadikan acuan dalam melaksanakan penelitian yang sejenis.

1.6 Kebaruan Penelitian

Kebaruan dalam penelitian ini adalah menentukan bilangan hubungan anti ajaib pelangi pada graf k-partit lengkap $K_{p_1,p_2,\dots,p_k}$ dan graf siklus *comb* lintasan $C_n \rhd_o P_m$.