

**BILANGAN KROMATIK GRACEFUL PADA GRAF
*TORUS $C_m \times C_n$***

SKRIPSI

**Diajukan kepada Universitas Pendidikan Ganesha
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam Menyelesaikan
Program Sarjana Sains**



Oleh

I Dewa Agung Ayu Arisma Cahyanti Putri

NIM 1913101007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN GANESHA

SINGARAJA

2023

SKRIPSI

**DIAJUKAN UNTUK MELENGKAPI TUGAS DAN
MEMENUHI SYARAT – SYARAT UNTUK MENCAPAI
GELAR SARJANA SAINS**



Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si.
NIP. 19650711 199003 1 003

Putu Kartika Dewi, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19900420 201903 2 021

Skripsi oleh I Dewa Agung Ayu Arisma Cahyanti Putri
telah dipertahankan di depan dewan penguji
pada tanggal 12 Juli 2023

Dewan Penguji,



Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si. (Ketua)
NIP. 19650711 199003 1 003



Putu Kartika Dewi, S.Pd., M.Sc. (Anggota)
NIP. 19900420 201903 2 021



Dr. Gede Suweken, M.Sc. (Anggota)
NIP. 19611111 198702 1 001



Prof. Dr. I Made Candiasa, Ml.Kom. (Anggota)
NIP. 19601231 198601 1 004

Diterima oleh Panitia Ujian Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Ganesha
guna memenuhi syarat-syarat untuk mencapai gelar sarjana Sains

Pada:

Hari : Kamis
Tanggal : 20 Juli 2023

Mengetahui,

Ketua Ujian,

Sekretaris Ujian,



Dr. I Wayan Sukra Warpala, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19671013 199403 1 001



I Gusti Nyoman Yudi Hartawan, S.Si., M.Sc.
NIP 19840525 200812 1 008

Mengesahkan
Bidang Akademik dan Kerjasama



Prof. Dr. Gede Rashen Dantes, S.T., M.T.I.
NIP. 19750221 200312 1 001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa karya tulis yang berjudul “**Bilangan Kromatik Graceful pada Graf Torus $C_m \times C_n$** ” beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya saya sendiri dan saya tidak melakukan penjiplakan dan pengutipan dengan cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung risiko/sanksi yang dijatuhkan kepada saya apabila kemudian ditemukan adanya pelanggaran atas etika keilmuan dalam karya saya ini atau ada klaim terhadap keaslian karya saya ini.



I Dewa Agung Ayu Arisma Cahyanti Putri
NIM. 1913101007

PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kehadapan Tuhan Yang Maha Esa atas karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**BILANGAN KROMATIK GRACEFUL PADA GRAF TORUS $C_m \times C_n$** ”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi syarat kelulusan untuk mencapai gelar Sarjana Sains di Universitas Pendidikan Ganesha. Dalam penyusunan skripsi ini, banyak sekali bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis ingin mengucapkan terimakasih setulus-tulusnya kepada:

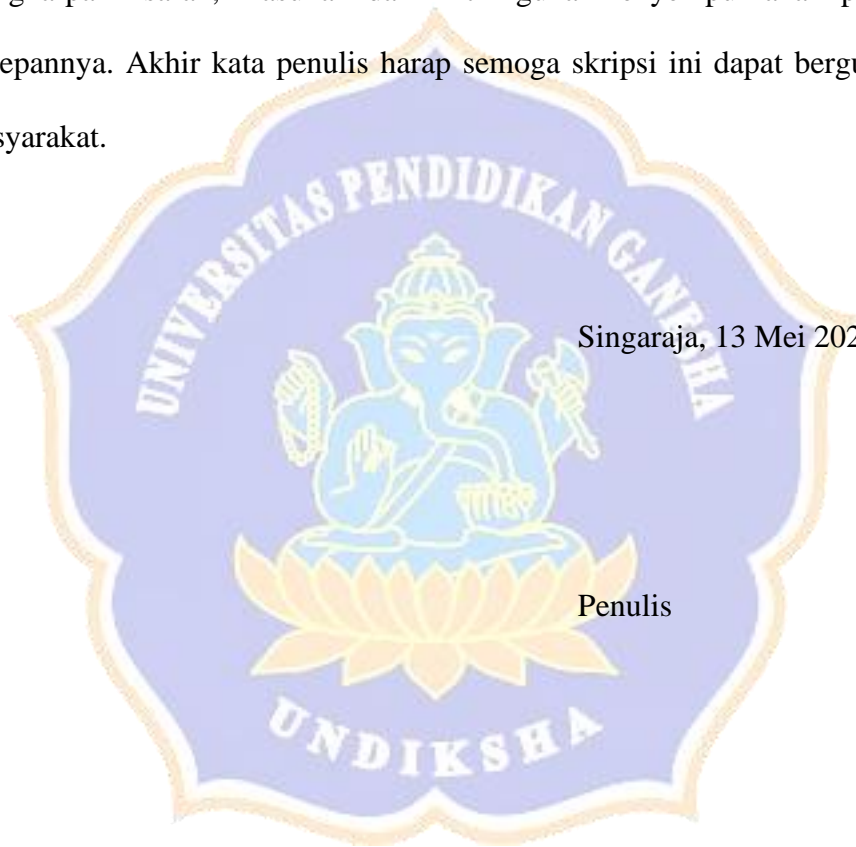
1. Bapak Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I dalam penyusunan skripsi yang sudah banyak membimbing, memberikan masukan, dan juga saran dalam menyelesaikan skripsi.
2. Ibu Putu Kartika Dewi, S.Pd., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing II dalam penyusunan skripsi ini yang sudah banyak membimbing, memberikan masukan dan saran dalam menyelesaikan skripsi.
3. Bapak Dr. Gede Suweken, M.Sc. selaku Dosen Penguji I dalam ujian skripsi yang sudah memberikan masukan dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Prof. Dr. I Made Candiasa, MI.Kom. selaku Dosen Penguji II dalam ujian skripsi yang sudah memberikan masukan dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu Dosen di Lingkungan Program Studi S1 Matematika yang telah banyak membantu dalam memberikan dukungan dan ilmu pengetahuan selama mengikuti studi.

6. Kedua Orang Tua yang penulis cintai yang menyertai penulis baik melalui doa maupun kehadiran, Ajik I Dewa Rai Sayang yang selalu memberikan dukungan, semangat, kasih sayang, dan motivasi kepada penulis dalam penyelesaian skripsi. Byang Desak Nyoman Rai Suryani yang semasa hidup selalu memberikan dukungan, semangat, kasih sayang, dorongan spiritual dan moral kepada penulis dalam penyelesaian skripsi, meskipun raganya tidak lagi disamping penulis namun doa, semangat dan dukungan yang diberikannya akan selalu menyertai penulis.
7. Saudara kandung yang penulis cintai yaitu Kakak I Dewa Agung Gede Aris Putra Atmaja dan saudara kembar penulis I Dewa Agung Ayu Arisma Prabayanti beserta Keluarga Besar Puri Saren Kauh dan Keluarga Besar Aan yang selalu mendoakan, mendukung dan memberikan semangat untuk penulis menyelesaikan skripsi ini dan mencapai impian.
8. Sahabat penulis Ayu Sayang yang memberikan semangat dalam pengerjaan skripsi ini.
9. Sahabat penulis yang bersama sedari penulis masih menjadi siswa sekolah hingga saat ini, Gita, Tias, Rizal, Okta, Udayana, Krisna, Kadek Agus, Wisnu yang telah memberikan semangat dalam menyelesaikan skripsi.
10. Sahabat dan rekan mahasiswa Jurusan Matematika yang telah membantu penulis dan memberikan semangat dalam menyelesaikan skripsi. Khususnya kepada Arya Bayu, Saka, Mega, Ayas, Deny yang selalu menemani dan memberikan semangat kepada penulis selama mengerjakan skripsi ini.

11. Kepada *boyband* EXO yang telah memberikan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini melalui karya-karya mereka.

12. Kepada diri penulis sendiri, *you are good enough*.

Penulis menyadari bahwasanya apa yang disajikan dalam skripsi ini masih jauh dari kata sempurna karena keterbatasan kemampuan dan pengetahuan yang penulis miliki. Oleh karena itu dengan segala kerendahan hati penulis mengharpakan saran, masukan dan kritik guna menyempurnakan penulisan kedepannya. Akhir kata penulis harap semoga skripsi ini dapat berguna bagi masyarakat.



Singaraja, 13 Mei 2023

Penulis

DAFTAR SIMBOL

- $G(V, E)$: Graf dengan himpunan tak kosong titik/*node/vertex* dinotasikan V dan himpunan sisi/*edge/side* dinotasikan E
- V : Himpunan titik/*node/vertex* pada graf
- E : Himpunan sisi/*edge/side* pada graf
- $\chi_g(G)$: Bilangan kromatik dari graf G
- $C_m \times C_n$: *Cartesian product* graf siklus/lingkaran
- $C_n \times P_m$: Graf *Generalized prisms*
- $\mathcal{L}_{m+1, n+1}$: *Ladder* atau tangga dari graf *Torus* $C_m \times C_n$



DAFTAR ISI

	HALAMAN
PRAKATA.....	i
ABSTRAK	iv
ABSTRACT.....	v
DAFTAR SIMBOL.....	vi
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR TABEL.....	xi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	3
1.3. Tujuan Penelitian	3
1.4. Manfaat Penelitian.....	3
1.4.1. Manfaat Teoretis	3
1.4.2. Manfaat Praktis	3
BAB II KAJIAN PUSTAKA	5
2.1. Graf.....	5
2.2. Graf Lintasan (<i>Path Graph</i>)	6
2.3. Graf Siklus (<i>Cycle Graph</i>)	7
2.4. Graf <i>Cartesian Product</i>	7
2.5. Pewarnaan Graf	8
2.4.1. Pewarnaan Titik (<i>Vertex Colouring</i>)	8
2.4.2. Pewarnaan Sisi (<i>Edge Colouring</i>).....	9
2.4.3. Pewarnaan Daerah (<i>Region Colouring</i>).....	10
2.6. Pewarnaan Graceful	10
2.7. Graf Torus $C_m \times C_n$	12

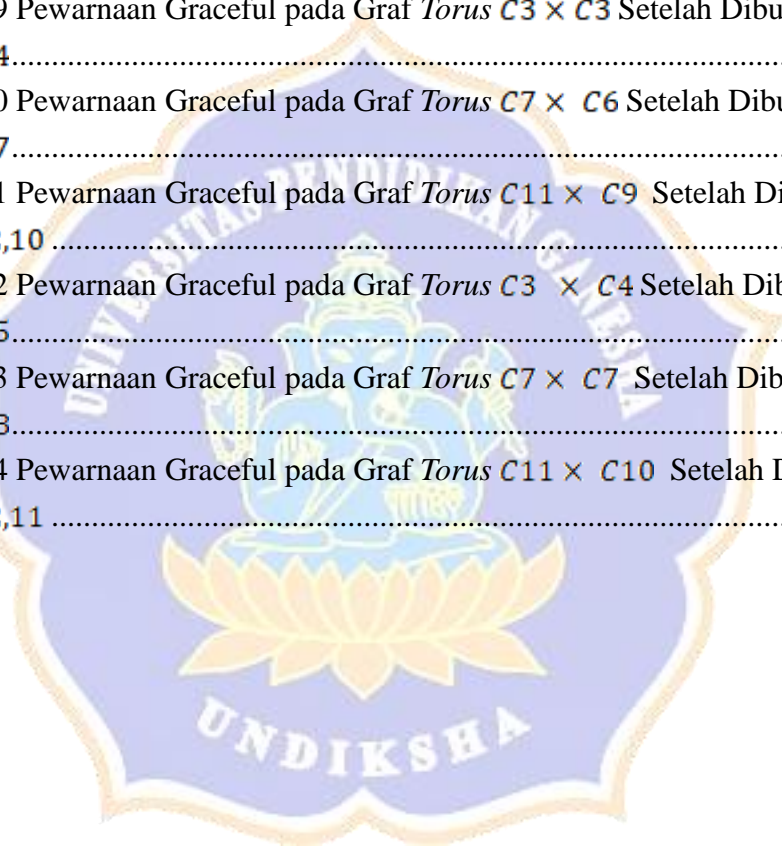
BAB III METODE PENELITIAN.....	15
3.1. Metode Penelitian.....	15
3.2. Prosedur Penelitian.....	15
BAB IV PEMBAHASAN.....	17
4.1. Graf Torus $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{3}$	18
4.2. Graf Torus $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 1 \pmod{3}$	21
4.3. Graf Torus $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 1 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{3}$	26
4.4. Graf Torus $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 1 \pmod{4}$ dan $n \equiv 1 \pmod{3}$	31
4.5. Graf Torus $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{3}$	38
4.6. Graf Torus $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 1 \pmod{3}$	43
4.7. Graf Torus $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 3 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{3}$	50
4.8. Graf Torus $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 3 \pmod{4}$ dan $n \equiv 1 \pmod{3}$	55
BAB V PENUTUP.....	62
5.1. Simpulan.....	62
5.2. Saran.....	62
DAFTAR PUSTAKA.....	63
LAMPIRAN.....	64



DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
Gambar 2. 1 Contoh Graf Lintasan	7
Gambar 2. 2 Contoh Graf Siklus.....	7
Gambar 2. 3 Contoh Graf <i>Cartesian Product</i>	8
Gambar 2. 4 Contoh Pewarnaan Titik	9
Gambar 2. 5 Contoh Pewarnaan Sisi	10
Gambar 2. 6 Contoh Pewarnaan Daerah	10
Gambar 2. 7 Contoh Pewarnaan Graceful.....	12
Gambar 2. 8 Contoh Graf <i>Torus</i> $C_m \times C_n$	12
Gambar 2. 9 Contoh Graf $C_n \times P_m + 1$	13
Gambar 2. 10 Contoh Graf $L_m + 1, n + 1$	13
Gambar 4. 1 Ilustrasi Graf $C_4 \times C_3$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{5,4}$	17
Gambar 4. 2 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_4 \times C_3$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{5,4}$	20
Gambar 4. 3 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_8 \times C_6$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{9,7}$	20
Gambar 4. 4 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_4 \times C_4$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{5,5}$	24
Gambar 4. 5 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_8 \times C_7$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{9,8}$	25
Gambar 4. 6 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{12} \times C_{10}$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{13,11}$	25
Gambar 4.7 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_5 \times C_3$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{6,4}$	30
Gambar 4. 8 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_9 \times C_6$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{10,7}$	30
Gambar 4. 9 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{13} \times C_9$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{14,10}$	31
Gambar 4. 10 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_5 \times C_4$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{6,5}$	36
Gambar 4. 11 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_9 \times C_7$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{10,8}$	37
Gambar 4. 12 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{13} \times C_{10}$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{14,11}$	37
Gambar 4. 13 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_6 \times C_3$ Setelah Dibuka Menjadi $L_{7,4}$	42

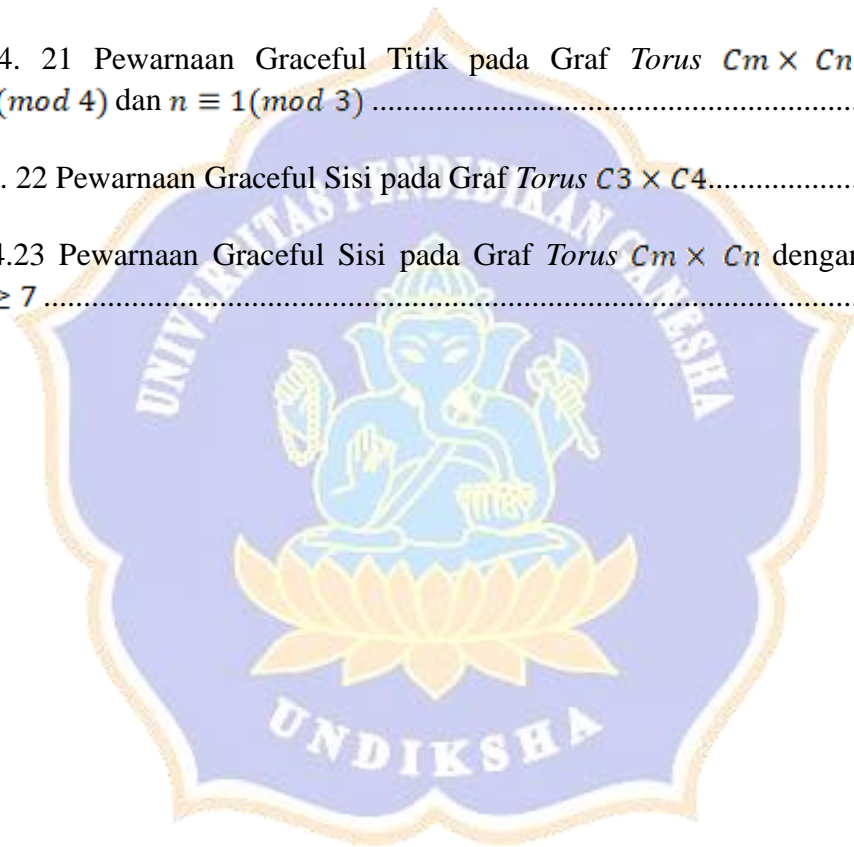
Gambar 4. 14 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{10} \times C_6$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{11,7}$	42
Gambar 4. 15 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{14} \times C_9$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{15,10}$	43
Gambar 4. 16 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_6 \times C_4$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{7,5}$	48
Gambar 4. 17 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{10} \times C_7$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{11,8}$	49
Gambar 4. 18 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{14} \times C_{10}$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{15,11}$	49
Gambar 4. 19 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_3 \times C_3$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{4,4}$	54
Gambar 4. 20 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_7 \times C_6$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{8,7}$	54
Gambar 4. 21 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{11} \times C_9$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{12,10}$	55
Gambar 4. 22 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_3 \times C_4$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{4,5}$	60
Gambar 4. 23 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_7 \times C_7$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{8,8}$	60
Gambar 4. 24 Pewarnaan Graceful pada Graf <i>Torus</i> $C_{11} \times C_{10}$ Setelah Dibuka Menjadi $\mathcal{L}_{12,11}$	61



DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
Tabel 4. 1 Pewarnaan Graceful Titik pada Graf $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 0(mod 4)$ dan $n \equiv 0(mod 3)$	18
Tabel 4. 2 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 0(mod 4)$ dan $n \equiv 0(mod 3)$	19
Tabel 4. 3 Pewarnaan Graceful Titik pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 0(mod 4)$ dan $n \equiv 1(mod 3)$	21
Tabel 4. 4 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf Torus $C_4 \times C_4$	22
Tabel 4. 5 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \geq 8$ dan $n \geq 7$	23
Tabel 4. 6 Pewarnaan Graceful Titik pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 1(mod 4)$ dan $n \equiv 0(mod 3)$	26
Tabel 4. 7 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf Torus $C_5 \times C_3$	27
Tabel 4. 8 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \geq 9$ dan $n \geq 6$	28
Tabel 4. 9 Pewarnaan Graceful Titik pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 1(mod 4)$ dan $n \equiv 1(mod 3)$	32
Tabel 4. 10 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf Torus $C_5 \times C_4$	33
Tabel 4. 11 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \geq 9$ dan $n \geq 7$	34
Tabel 4. 12 Pewarnaan Graceful Titik pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 2(mod 4)$ dan $n \equiv 0(mod 3)$	38
Tabel 4. 13 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf Torus $C_6 \times C_3$	39
Tabel 4. 14 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \geq 10$ dan $n \geq 6$	40
Tabel 4. 15 Pewarnaan Graceful Titik pada Graf Torus $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 2(mod 4)$ dan $n \equiv 1(mod 3)$	44

Tabel 4. 16 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf <i>Torus</i> $C_6 \times C_4$	45
Tabel 4.17 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf <i>Torus</i> $C_m \times C_n$ dengan $m \geq 10$ dan $n \geq 7$	46
Tabel 4. 18 Pewarnaan Graceful Titik pada Graf <i>Torus</i> $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 3(mod 4)$ dan $n \equiv 0(mod 3)$	50
Tabel 4. 19 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf <i>Torus</i> $C_3 \times C_3$	51
Tabel 4. 20 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf <i>Torus</i> $C_m \times C_n$ dengan $m \geq 7$ dan $n \geq 6$	52
Tabel 4. 21 Pewarnaan Graceful Titik pada Graf <i>Torus</i> $C_m \times C_n$ dengan $m \equiv 3(mod 4)$ dan $n \equiv 1(mod 3)$	56
Tabel 4. 22 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf <i>Torus</i> $C_3 \times C_4$	57
Tabel 4.23 Pewarnaan Graceful Sisi pada Graf <i>Torus</i> $C_m \times C_n$ dengan $m \geq 7$ dan $n \geq 7$	58



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
Lampiran 1. Riwayat Hidup.....	65

