

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari struktur, sifat-sifat matematis, dan hubungan antar komponen dari suatu objek yang disebut graf. Suatu graf didefinisikan sebagai sebuah pasangan himpunan terurut  $(V(G), E(G))$  dimana  $V(G)$  merupakan himpunan titik (*vertex*), dan  $E(G)$  adalah himpunan multiset yang terdiri dari dua elemen yang terhubung antara elemen  $V(G)$ , sehingga elemen  $E(G)$  disebut sebagai sisi (*edge*) (Zulfi Amri, 2017). Sebagai contoh, sebuah graf dengan empat titik yaitu  $v_1, v_2, v_3$ , dan  $v_4$ , serta empat sisi yaitu  $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4$  dan  $v_1v_4$ , merupakan sebuah graf yang direpresentasikan sebagai pasangan terurut  $(V(G), E(G))$  dimana  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan  $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$ . Graf dapat digunakan untuk merepresentasikan berbagai jenis objek, yakni sebagai model matematis untuk memodelkan dan menganalisis banyak situasi dunia nyata, seperti jaringan jalan raya, jaringan sosial, jaringan internet, molekul kimia, dan masih banyak lagi (Bondy & Murty, 2008).

Teori graf terus mengalami perkembangan dan salah satu topik yang menarik perhatian para peneliti adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah pemetaan yang mengasosiasikan suatu bilangan bulat dengan setiap titik, sisi atau titik dan sisi dari suatu graf, dengan memperhatikan batasan-batasan tertentu (Chartrand, Lesniak & Zhang, 2010). Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlăck (1964) mengenai pelabelan ajaib, kemudian Stewart (1966) mengenai pelabelan sisi ajaib, Kotzig dan Rosa (1970) dalam jurnalnya "*Magic Valuations of*

*Finite Graph*” (Yesi, dkk., 2016). Seiring waktu, beberapa jenis pelabelan graf berkembang dan semakin dikenal seperti pelabelan graceful, pelabelan anti ajaib, pelabelan total, pelabelan harmonis, dan pelabelan harmonis ganjil (Maryana & Sugeng, 2021).

Salah satu pelabelan yang terkenal dan saat ini sedang gencar dikembangkan adalah pelabelan graceful. Pelabelan graceful mulai diperkenalkan tahun 1967 oleh Alex Rosa yang menyebut suatu fungsi  $f$  merupakan  $\beta$ -*valuation* dari graf  $G$  dengan sisi  $q$  jika  $f$  adalah fungsi injektif dari himpunan titik  $G$  ke himpunan  $\{0,1,2, \dots, q\}$  sedemikian sehingga, untuk setiap sisi  $uv$  diberi label  $|f(u) - f(v)|$ , dengan label yang dihasilkan berbeda. Selanjutnya oleh Columb menyebut pelabelan tersebut sebagai pelabelan graceful (Gallian, 2022).

Dua titik  $u$  dan  $v$  disebut *adjacent* (bertetangga) pada graf  $G$  jika titik-titik tersebut dihubungkan oleh suatu sisi  $e$  pada  $G$ . Begitu pula jika sisi  $e$  dan  $f$  dihubungkan oleh suatu titik yang sama yaitu  $v$ , maka sisi  $e$  dan  $f$  *adjacent* (bertetangga) melalui titik  $v$ . Kemudian jika  $u$  dan  $v$  *adjacent* (bertetangga) melalui sisi  $e$ , maka titik  $u$  dan  $v$  disebut *incident* (terkait) dengan sisi  $e$ , begitu pula sisi  $e$  juga disebut *incident* (terkait) dengan titik  $u$  dan  $v$ . Misalkan  $M$  merupakan himpunan sisi dari  $G(V, E)$  sedemikian sehingga setiap pasang elemen  $M$  tidak *adjacent* (bertetangga), maka  $M$  disebut sebagai *matching*. Selanjutnya jika setiap titik dalam  $V$  yang *incident* (terkait) dengan tepat satu elemen  $M$ , maka *matching*  $M$  disebut sebagai *perfect*. Dalam kasus ini graf  $G(V, E)$  disebut dengan *perfect matching*. Dengan ungkapan lain, jika  $M$  adalah *perfect matching* dari  $G$ , maka setiap titik dalam  $V$  *incident* (terkait) dengan tepat satu sisi dalam  $M$  dan setiap sisi dalam  $M$  *incident* (terkait) dengan tepat satu pasang titik di dalam  $V$  (Li, Liu &

Zhang, 2019). Kemudian, jika graf graceful  $G$  dengan pelabelan graceful  $f$  memiliki *perfect matching*  $M$  sedemikian sehingga untuk setiap  $uv \in M$  berlaku  $f(u) + f(v) = |E|$ , maka graf  $G(V, E)$  disebut sebagai graceful kuat (*strongly graceful*).

Dalam beberapa tahun terakhir, telah banyak dilakukan penelitian terkait pelabelan graceful, khususnya pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*). Tao-Ming Wang dkk pada tahun 2015 dengan judul penelitiannya "*Infinitely Many Equivalent Versions Of The Graceful Tree Conjecture*" membahas mengenai beberapa konjektur terkait suatu graf pohon  $T$  yang mengandung *perfect matching*  $M$  merupakan *strongly graceful* jika  $T$  mempunyai pelabelan graceful  $f$  sehingga  $f(u) + f(v) = n + 1$  untuk setiap sisi  $uv$  dalam  $M$  yang menjawab dugaan Broersma & Hoede bahwa setiap graf pohon itu memiliki *perfect matching* merupakan graceful kuat (*strongly graceful*). Kemudian Rafael Rofa pada tahun 2021 dengan penelitiannya yang berjudul "*Graceful and Strongly Graceful Permutations*" membuktikan bahwa setiap graf pohon dengan *perfect matching*  $M$  merupakan graceful kuat (*strongly graceful*) dan membahas tentang permutasi graceful kuat. Feng, Wu, dan Zhang (2021) dengan judul penelitian "*Strongly Graceful Trees With Small Degree Sequences*" memperkenalkan algoritma baru untuk menghasilkan deret bilangan yang dapat diubah menjadi deret derajat pohon graceful kuat (*strongly graceful*). Auvray, dkk (2017) dengan judul penelitian "*On Strongly Graceful Stars and Fans*" membahas mengenai derajat bilangan yang dapat digunakan untuk membuat pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*) pada graf bintang dan kipas tertentu. Zhang dan Wang (2018) dengan judul penelitian "*Strongly Graceful Graphs With 3-Cycles*" menemukan beberapa kelas graf teratur

dengan jumlah titik yang rendah dan membuktikan bahwa graf-graf ini memiliki pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*). Terakhir, penelitian yang dilakukan oleh I Nengah Suparta (2021) dengan judul penelitian “*Graceful Cycles with Perfect Matching are Strongly Graceful*” merupakan penelitian terbaru mengenai graf  $C_n$  serta membuktikan beberapa teorema yang diberikan bahwa untuk graf  $C_n$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n \equiv 0 \pmod{4}$  adalah graceful kuat (*strongly graceful*).

Hasil-hasil penelitian tersebut memberikan kontribusi baru pada teori graf khususnya mengenai pelabelan graf graceful kuat (*strongly graceful*), dengan menemukan algoritma baru, membuktikan beberapa sifat khusus serta menemukan pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*) pada kelas graf tertentu. Namun, mayoritas dari penelitian-penelitian yang pernah dilakukan masih terbatas pada pembahasan mengenai graf pohon, serta masih minim dilakukan penelitian mengenai kombinasi dari jenis graf lain yang lebih kompleks. Dengan kata lain, masih sangat memungkinkan bagi para peneliti untuk mengkaji dan meneliti lebih dalam mengenai pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*) pada kombinasi jenis graf lain selain graf pohon, contohnya yaitu kombinasi graf *cycle* dan *path* yang dapat diklasifikasi menjadi jenis graf baru.

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah disebutkan serta menurut hasil survey dinamis oleh Gallian pada jurnalnya yang berjudul “*A Dynamic Survey of Graph Labeling*” mengenai pelabelan graf yang mencakup berbagai pelabelan graf yang ada di belahan dunia, maka ditemukan bahwa penelitian yang mengkaji pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*) masih sangat minim dilakukan, khususnya pada kombinasi graf *cycle* dan *path*. Dengan demikian penulis bermaksud melakukan kajian pada kombinasi graf *cycle* dan *path* dengan

pengembangan yang lebih kompleks, yaitu inovasi untuk melakukan pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*) pada kombinasi graf *cycle* dengan  $n$  sisi dan sebuah *path* dengan  $t$  buah sisi sebagai *tail* (ekor) yang *incident* pada salah satu sisi dari graf *cycle*, serta memiliki sejumlah *path* lain dengan jumlah sisi maksimal sebanyak  $k$  sebagai *hair* (rambut) yang *incident* dengan titik-titik lain dari graf *cycle* tersebut. Maka dari itu, penulis merumuskan penelitian ini dengan judul “Pelabelan Graceful Kuat (*Strongly Graceful*) pada Graf *Fully Uniform*  $(n, t, k)$ -*Hairy Dragon*”.

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan, adapun rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah: “bagaimana pelabelan graceful kuat pada graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon*?”.

### 1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan latar belakang dan mengacu pada rumusan masalah yang diajukan, tujuan dari penelitian ini adalah: “meneliti bagaimana pelabelan graceful kuat pada graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon*”.

### 1.4 Manfaat Penulisan

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan hasil yang bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan khususnya dalam bidang matematika, baik dari secara teoritis maupun aplikasi praktis. Berikut adalah manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini.

#### 1.4.1 Manfaat Teoretis

Adapun manfaat teoretis yang diharapkan penulis dalam penelitian ini yaitu dapat menambah pengetahuan dan wawasan serta berkontribusi

memberikan ide pemikiran dalam bidang matematika khususnya dalam teori graf mengenai pelabelan graceful kuat pada graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairly dragon*. Penulis juga berharap agar penelitian ini dapat menjadi acuan bagi penelitian-penelitian sejenis dan membuka jalan bagi penelitian lebih lanjut.

#### 1.4.2 Manfaat Praktis

##### 1. Bagi Peneliti

Menambah wawasan dan meningkatkan keterampilan dalam pelabelan graf graceful kuat khususnya pada graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairly dragon* dan memperoleh pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun hasil karya ilmiah. Hal ini juga akan membantu memanfaatkan pengetahuan matematika yang telah diperoleh selama ini.

##### 2. Bagi Pembaca

Menambah wawasan serta menyediakan informasi dan menjadi sumber rujukan bagi pembaca untuk memperluas pengetahuan mereka mengenai pelabelan graf terutama tentang pelabelan graf graceful kuat sehingga dapat digunakan sebagai dasar untuk melakukan penelitian yang sejenis.

##### 3. Bagi Jurusan Matematika

Hasil dari penelitian dapat digunakan sebagai bahan bacaan yang bermanfaat untuk menambah referensi dalam pembelajaran tentang teori graf, dan juga sebagai referensi bagi mahasiswa jurusan

Matematika Universitas Pendidikan Ganesha yang tertarik dalam melakukan penelitian dengan topik ini.

