

**PELABELAN GRACEFUL KUAT (*STRONGLY GRACEFUL*)  
PADA GRAF *HAIRY DRAGON***

Oleh

**I Putu Saka Yudipastrawan, NIM. 1913101004**

**Jurusan Matematika**

**ABSTRAK**

Pelabelan graceful pada graf  $G(V, E)$  adalah fungsi injektif  $f$  dari himpunan titik  $V(G)$  ke himpunan bilangan  $\{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$  yang menginduksi fungsi bijektif  $f'$  dari himpunan sisi  $E(G)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, |E(G)|\}$  sedemikian sehingga untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$  dengan  $u, v \in V(G)$  berlaku  $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ . Jika graf graceful  $G$  dengan pelabelan graceful  $f$  memiliki *perfect matching*  $M$  sedemikian sehingga untuk setiap  $uv \in M$  berlaku  $f(u) + f(v) = |E|$ , maka graf  $G(V, E)$  disebut sebagai *strongly graceful* (graceful kuat). Graf  $(n, t, k)$ -*hairy dragon* dengan  $n, t, k \in \mathbb{N}$  merupakan graf yang terdiri dari sebuah graf *cycle* dengan  $n$  sisi dan sebuah *path* dengan banyak sisi  $t$  sebagai *tail* (ekor) yang *incident* pada salah satu titik dari graf *cycle*, serta memiliki sejumlah *path* lain dengan jumlah sisi maksimal sebanyak  $k$  sebagai *hair* (rambut) yang *incident* dengan titik-titik lain dari graf *cycle* tersebut. Graf  $(n, t, k)$ -*hairy dragon* yang memiliki rambur yang sempurna atau terdapat rambur pada setiap titik di *cycle*-nya dengan jumlah sisi pada setiap ramburnya sebanyak  $k$  disebut *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon*. Kajian ini membahas pelabelan graceful dengan penambahan sifat bahwa untuk setiap  $uv \in M$  berlaku  $|E| = f(u) + f(v)$  sehingga menjadi graf graceful kuat pada graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon* dengan  $n(k + 1) - k + t = |E|$ . Hasil penelitian yang dilakukan membuktikan bahwa graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon* dengan  $n \equiv 0 \pmod{4}, n \geq 8, t \equiv 0 \pmod{2}, t \geq 2, k \equiv 0 \pmod{2}, k \geq 2$ , graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon* dengan  $n \equiv 0 \pmod{4}, n \geq 4, t \equiv 1 \pmod{2}, k \equiv 1 \pmod{2}$ , graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon* dengan  $n \equiv 2 \pmod{4}, n \geq 6, t \equiv 1 \pmod{2}, k \equiv 1, 3, 5, 7, 9$ , dan graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon* dengan  $n \equiv 3 \pmod{4}, t \equiv 3 \pmod{4}, k = 2$  merupakan graf graceful kuat. Dengan terbatasnya penelitian yang membahas mengenai graceful kuat, sehingga dapat dilakukan penelitian yang serupa pada jenis graf yang lain.

**Kata kunci:** pelabelan graceful, graceful kuat, graf *fully uniform*  $(n, t, k)$ -*hairy dragon*, *matching*.

**STRONGLY GRACEFUL LABELING  
OF FULLY UNIFORM  $(n, t, k)$ -HAIRY DRAGON GRAPH**

By

**I Putu Saka Yudipastrawan, NIM. 1913101004**

**Mathematics Department**

**ABSTRACT**

Graceful labeling on a graph  $G = (V(G), E(G))$  is an injective function  $f$  from the set of vertices  $V(G)$  to the set of numbers  $\{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$  that induces a bijective function  $f'$  from the set of edges  $E(G)$  to the set of numbers  $\{1, 2, \dots, |E(G)|\}$  such that for every edge  $uv \in E(G)$  with  $u, v \in V(G)$ , we have  $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ . If a graceful graph  $G$  has a graceful labeling  $f$  and there exists a perfect matching  $M$  satisfying the property that for every  $uv \in M$ , we have  $|E| = f(u) + f(v)$ , then  $G$  is called a strongly graceful graph. A  $(n, t, k)$ -hairy dragon graph consists of a cycle graph with  $n$  vertices ( $C_n$ ) and a path with  $t$  edges as the tail, incident to one of the vertices of the cycle graph, and it also has several other paths with a maximum of  $k$  edges as the hair, incident to other vertices of the cycle graph. A fully uniform  $(n, t, k)$ -hairy dragon graph is one that has either a perfect hair or has hair on every vertex of its cycle, with each hair having  $k$  edges. This research proves that fully uniform  $(n, t, k)$ -hairy dragon graphs satisfy the criteria of being a strong graceful graph in the following cases:  $n \equiv 0 \pmod{4}, n \geq 8, t \equiv 0 \pmod{2}, t \geq 2, k \equiv 0 \pmod{2}, k \geq 2$ ;  $n \equiv 0 \pmod{4}, n \geq 8, t \equiv 1 \pmod{2}, k \equiv 1 \pmod{2}$ ;  $n \equiv 2 \pmod{4}, n \geq 6, t \equiv 1 \pmod{2}, k \equiv 1, 3, 5, 7, 9$ ; and  $n \equiv 3 \pmod{4}, t \equiv 3 \pmod{4}, k = 2$ . Further research can be conducted on other types of graphs, considering the limited studies that have been done on strongly graceful graphs.

**Keywords:** graceful labeling, strongly graceful, fully uniform  $(n, t, k)$ -hairy dragon graph, matching.