

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kajian graf dinyatakan sebagai pembagian wawasan memberikan pembelajaran matematika struktur dan sifat graf serta hubungan antara unsur-unsur dari graf. Suatu graf yang dinotasikan dengan G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$. $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong titik (*vertices*) pada graf G dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi (*edge*) sedemikian sehingga tiap elemen $E(G)$ terkait dengan tepat pada satu pasangan tak terurut anggota himpunan titik $V(G)$ (Buhaerah, Busrah, & Sanjaya, 2019). Dalam teori graf, graf digunakan sebagai memvisualisasikan berbagai jenis obyek dan menganalogikan situasi dunia nyata seperti jaringan jalan raya, jaringan internet, dan sebagainya (Diana, Suryaningtyas, & Suprapti, 2016).

Salah satunya tema yang diteliti pada kajian graf ini yakni pelabelan yang mana dinyatakan sebagai sebuah fungsi yang melakukan pemetaan elemen graf (titik atau sisi) kepada himpunan bilangan bulat yang positive berdasarkan pola tertentu. Konsep pelabelan graf ini awal mulanya dikenalkan Sadlack pada tahun 1964 dalam konsep label ajaibnya yang selanjutnya diperkenalkan label sisi titik ajaibnya oleh Stewart pada tahun 1966, dan Kotzig dan Rosa (1970) dalam tulisan yang berjudul “*magic valuation of finite graph*” (Yesi, Sudarsana, & Musdalifah, 2016). Seiring waktu, beberapa jenis pelabelan graf berkembang dan semakin dikenal seperti pelabelan graceful, ajaib, anti ajaib, harmonis serta harmonis ganjill. Perkembangan jenis pelabelan sejalan dengan kebermanfaatan aplikasi pelabelan

graf sebagai pemodelan matematika pada berbagai bidang ilmu seperti dalam ilmu komputer, pelabelan graf dimanfaatkan untuk memodelkan jaringan internet (Santhakumaran & Balaganesan, 2018).

Pelabelan graceful merupakan pelabelan diperkenalkan oleh Alex Rosa pada tahun 1976. Dalam tulisan berjudul “*On certain valuations of the vertices of a graphs, in: Theory of Graph*”, pelabelan graceful saat itu disebut dengan istilah pelabelan β (β labeling). Pelabelan ini diartikan menjadi fungsi f melalui satu graf G sert V simpul, yang mana apabila f yakni fungsi injektif melalui V kepada himpunan bilangan bulat $\{0, 1, \dots, |E|\}$ sedemikian hingga setiap sisi uv diberi label dengan $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ menghasilkan label-label yang berbeda untuk setiap sisi pada graf G (Kaloko & Ahyaningsih, 2016). Pelabelan graceful hingga sekarang ini sudah kebanyakan digunakan kebermanfaatannya pada beberapa bagian ilmu. Dalam jaringan komputer, pelabelan graceful dimanfaatkan sebagai konsep yang membantu memetakan alamat IP dan organisir data untuk mengurangi penggunaan *bandwidth* sehingga lebih efektif. Banyaknya manfaat yang signifikan menyebabkan pelabelan graceful menjadi topik penelitian yang dikembangkan dalam berbagai konsep hingga saat ini.

Penelitian terkait pelabelan graceful sudah bebrapa diadakan pada tahun akhir ini. suatu bentuk varian dari penelitian dan konsep pelabelan graceful adalah pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*). Pelabelan graceful kuat merupakan pelabelan yang melibatkan *perfect matching*. *Matching M* adalah himpunan sisi pada graf G , sedemikian sehingga setiap elemen M tidak *incident* pada *vertex* yang sama. Jika setiap titik di dalam V berhubungan akan kesesuaian suatu element M , dengan demikian *matching M* nya dinyatakan sebagai kesempurnaan. Apabila graf

ini melalui label gracefulnya mempunyai perfect matching maka pada tiap $uv \in M$ dan $f(u) + f(v) = |E|$, maka graf $G(V, E)$ disebut sebagai graceful kuat (*strongly graceful*) (Rofa, 1967).

Beberapa tahun terakhir telah banyak dilakukan penelitian terkait pelabelan graceful, khususnya pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*). Pada tahun 2016, Xiyang Zhao mengelompokkan graf pohon yang memiliki pelabelan graceful kuat dan algoritma dari pelabelannya dalam tulisannya yang berjudul “*Introduced A Class of Trees Having Strongly Graceful Labelings*”. Rafael Rofa pada tahun 2021 dengan penelitiannya yang berjudul “*Graceful and Strongly Graceful Permutations*” memberi pembuktian bahwasannya tiap graf pohon melalui *perfect matching* M dinyatakan sebagai (*strongly graceful*) serta melakukan pembahasan mengenai permutasian melalui graceful kuat. Terakhir, kajian ini diadakan I Nengah Suparta (2021) yang judulnya “*Graceful Cycles with Perfect Matching Are Strongly Graceful*” merupakan penelitian terbaru mengenai graf C_n dengan $n \geq 4$ dan $n \equiv 0 \pmod{4}$ adalah graceful kuat (*strongly graceful*).

Hasil penelitian yang dipaparkan di atas memberikan kontribusi baru pada pengkajian lebih lanjut mengenai pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*). Pengkajian dilakukan dengan penemuan algoritma baru, membuktikan beberapa sifat khusus serta menemukan pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*) pada kelas graf tertentu. Namun, beberapa hasil penelitian masih terbatas pada pembahasan pelabelan graceful kuat pada graf pohon dan kombinasi dari graf *path*. Banyaknya jenis pelabelan dan pelabelan graf yang telah rampung dikerjakan terhimpun dalam tulisan “*A Dynamic Survey of Graph Labeling*” (Gallian, 2018). Penulis menemukan bahwasannya masih sedikit pembahasan penelitian yang

memberikan hasil pelabelan graceful kuat, sehingga terdapat banyak peluang untuk meneliti dan mengkaji pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*) pada jenis graf lain. Salah satu konstruksi graf adalah graf *Bicycle* yang melibatkan graf *cycle* dan graf *path*. Berlandaskan pemaparan sebelumnya dijelaskan maka peneliti mempunyai maksud dalam melakukan kajian pelabelan graceful kuat (*strongly graceful*) pada dua graf *cycle* yang terhubung dengan graf *path*. Oleh karena itu, penulis merumuskan penelitian ini dengan judul “Pelabelan Graceful Kuat (*Strongly Graceful*) pada Graf *Bicycle*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berlandaskan uraian tersebut, terdapat persoalan yang ditetapkan yang akan diadakan riset lebih lanjut pada kajian ini yakni apakah graf *bicycle* graf yang *graceful* kuat (*strongly graceful*)?

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan latar belakang dan mengacu pada rumusan masalah yang diajukan pada penelitian ini memiliki tujuan menentukan dan menjawab identifikasi graf *bicycle* yang *graceful* kuat (*strongly graceful*).

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan mampu memberikan manfaat bagi ilmu pengetahuan khususnya dalam bidang matematika baik manfaat secara teoritis maupun manfaat praktis. Adapun manfaat secara teoretis dan praktis sebagai berikut.

1.4.1 Manfaat Teoretis

Adapun manfaat teoretis yang diharapkan penulis dalam melakukan penelitian ini adalah mampu menambah wawasan serta pengetahuan dalam bidang

matematika tentang pelabelan graf *graceful* kuat serta memberikan sumbangsih pemikiran pada bidang matematika utamanya dalam teori graf tentang pelabelan graf *bicycle*.

1.4.2 Manfaat Praktis

1. Bagi Peneliti

Hasil penelitian ini dapat menjadi salah satu rujukan yang relevan untuk penelitian selanjutnya, memberikan pengalaman dalam melaksanakan penelitian serta menyusun karya ilmiah dengan mengaplikasikan bidang ilmu matematika yang telah dipelajari dalam memperoleh hasil penelitian pelabelan *graceful* kuat pada graf *bicycle*.

2. Bagi Pembaca

Hasil penelitian ini dapat menjadi referensi pembaca terkait pelabelan khususnya pelabelan *graceful* kuat pada graf *bicycle* sehingga dapat menjadi acuan dalam melaksanakan penelitian sejenis.

3. Bagi Jurusan Matematika

Luaran dari penelitian ini dapat menjadi bahan bacaan untuk menambah referensi pembelajaran pada bidang teori graf serta sebagai referensi khususnya bagi mahasiswa Undiksha jurusan matematika yang memiliki minat dalam pembahasan atau sedang melakukan penelitian dengan topik sejenis.

1.5 Batasan Penelitian

Penelitian ini terbatas pada pelabelan *graceful* pada kontruksi graf *bicycle* yang melibatkan graf siklus dengan banyak sisi $0(\text{mod } 4)$, $1(\text{mod } 4)$, $2(\text{mod } 4)$, dan $3(\text{mod } 4)$.