

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Graf  $G = (V, E)$  didefinisikan sebagai himpunan berhingga tak kosong dari objek yang disebut simpul yang dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan (mungkin kosong) yang elemennya merupakan pasangan tak terurut dari dua simpul dari graf  $G$  disebut sisi yang dinotasikan dengan  $E(G)$ . Sedangkan  $|V(G)|$  dan  $|E(G)|$  berturut-turut menggambarkan jumlah titik dan jumlah sisi pada graf  $G$ . Adapun aplikasi yang berkaitan dengan graf, yaitu untuk menentukan rute yang terdekat, penggunaan internet, dan sebagainya.

Seiring berjalannya waktu, banyak ilmuwan menemukan beberapa konsep dan gagasan baru dalam teori graf, salah satunya adalah dimensi metrik ketetanggaan lokal. Dimensi metrik ketetanggaan lokal merupakan kardinalitas dari basis metrik ketetanggaan lokal. Basis metrik ketetanggaan lokal adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan kardinalitas minimum. Himpunan pembeda ketetanggaan lokal yaitu himpunan yang menyebabkan setiap dua simpul yang berbeda dan bertetangga memiliki representasi ketetanggaan yang berbeda. Intinya, dalam dimensi metrik ketetanggaan lokal setiap simpul pada graf boleh memiliki representasi ketetanggaan yang sama dengan syarat simpul-simpul tersebut tidak saling bertetangga.

Salah satu penerapan dari dimensi metrik ketetanggaan lokal menurut Alifiah Yulisda Badri (2018), yaitu sistem pergerakan robot dari simpul ke simpul lainnya harus diberikan kode yang berbeda untuk meminimalkan kesalahan dalam menerjemahkan kode yang didapatkan dari simpul-simpulnya. Agar robot bergerak efisien, robot harus cepat untuk menerjemahkan kode simpul-simpul yang dilaluinya. sehingga simpul tersebut mempunyai jarak seminimal mungkin. Namun jika robot harus bergerak dengan simpul-simpul pada bidang yang sangat besar, maka robot tidak dapat mendeteksi karena jarak yang terlalu jauh. Dalam kasus ini, robot

dapat menentukan posisinya dengan memanfaatkan simpul-simpul berdasarkan ketetanggaan.

Penelitian yang berhubungan dengan dimensi metrik ketetanggaan lokal terus mengalami perkembangan, dimulai penelitian dari Okamoto dkk, (2010) membahas tentang dimensi metrik lokal dari graf. Penelitian ini berhasil mengelompokkan semua graf terhubung nontrivial yang dimensi metrik lokalnya  $1, n - 2$ , atau  $n - 1$  dan menentukan batas-batas dimensi metrik lokal dari graf. Penelitian dari Jannesari dan Omoomi, (2012) mengkaji tentang dimensi metrik untuk *lexicographic product* dari graf  $G$  dan  $H$ , di penelitian tersebut juga memperkenalkan konsep dimensi metrik ketetanggaan sebagai dasar untuk mengembangkan konsep baru yakni dimensi metrik ketetanggaan lokal pada penelitian berikutnya. Penelitian ini pada intinya berhasil menunjukkan bahwa dimensi metrik dari  $G[H]$  adalah  $n$  kali dimensi metrik ketetanggaan dari  $H$ .

Selanjutnya, penelitian dari Rodríguez dan Fernau, (2013) mengkaji tentang dimensi metrik ketetanggaan dari graf hasil operasi *corona* dan *strong product* serta memperkenalkan konsep dimensi metrik ketetanggaan lokal yang diperoleh dari mengkombinasikan dimensi metrik lokal dan dimensi metrik ketetanggaan. Penelitian ini intinya berhasil menunjukkan dimensi metrik (lokal) dari  $G \odot H$  sama dengan  $n$  kali dimensi metrik ketetanggaan (lokal)  $H$ , untuk beberapa graf nontrivial  $H$ .  $dim(G \boxtimes H) = dim_A(G \boxtimes H) = n'(n - t)$  jika  $G$  dan  $H$  graf terhubung dengan orde  $n$  dan  $n'$  dengan  $V(G)$  dapat dipartisi menjadi  $t$  kelas ekuivalensi true twins serta  $H$  tidak memiliki kelas ekuivalensi true twins.

Penelitian dari Rinurwati dkk, (2017) membahas tentang dimensi metrik ketetanggaan lokal dari beberapa graf roda yang terkait (graf gir, graf helm, graf bunga matahari, dan graf friendship) dengan pendant point. Penelitian ini menghasilkan teorema yakni dimensi metrik ketetanggaan lokal untuk graf gir, graf helm, graf bunga matahari, dan graf friendship dengan pendant point berturut-turut  $dim_{A,l}(G_{2n} \diamond K_1) = n$ ,  $dim_{A,l}(H_n \diamond K_1) = n + 1$ ,  $dim_{A,l}(SF_n \diamond K_1) = n$ ,  $dim_{A,l}(\mathcal{F}_n \diamond K_1) = n$  untuk  $n \geq 3$ . Khusus graf roda dengan pendant point,  $dim_{A,l}(W_n \diamond K_1) = \left\lfloor \frac{n+9}{6} \right\rfloor$  untuk  $n \geq 4$ .

Penelitian yang dilakukan oleh Alifiah Yulisda Badri (2018) membahas mengenai dimensi metrik ketetangaan dan dimensi metrik ketetangaan lokal untuk beberapa graf, yaitu graf matahari dan graf buku bertumpuk. Penelitian tersebut menghasilkan teorema, yaitu dimensi metrik ketetangaan graf matahari  $(M_{n,m})$  dan graf buku bertumpuk  $(B_{n,m})$  berturut-turut  $dim_A(M_{n,m}) = nm - 1$  dan  $dim_A(B_{n,m}) = n \left(\frac{m}{2}\right) + \left(\frac{m}{2} - 1\right)$  jika  $m$  genap,  $n \left(\frac{m+1}{2}\right) + \left(\frac{m+1}{2} - 2\right)$  jika  $m$  ganjil. Untuk dimensi metrik ketetangaan lokalnya berturut-turut  $dim_{A,l}(M_{n,m}) = 2$  jika  $n = 3, m \geq 1$ ,  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  jika  $n > 3, m \geq 1$ ; dan  $dim_{A,l}(B_{n,m}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ . Adapun penelitian yang dilakukan oleh Barragán-Ramírez, dkk (2019) merupakan perkembangan dari penelitian oleh Jannesari dan Omoomi, (2012) yang membahas dimensi metrik lokal untuk *lexicographic product* dari graf  $G$  dan  $H$ . Inti dari penelitian ini berhasil menunjukkan bahwa dimensi metrik lokal dari  $G[H]$  dapat dinyatakan dalam kelas ekuivalensi true twins dari  $G$  dan dimensi metrik ketetangaan lokal dari  $H$ .

Penelitian yang dilakukan oleh Albirri, dkk (2019) membahas mengenai dimensi metrik ketetangaan lokal untuk operasi  $m$ -split dari graf komplit  $(K_n)$  dan sejenisnya yakni graf bipartit  $(K_{n,t})$ . Penelitian tersebut menghasilkan teorema, yaitu  $dim_{A,l}(Spl_m(K_n)) = n - 1$  dan  $dim_{A,l}(Spl_m(K_{n,t})) = 1$ , sedangkan penelitian yang dilakukan oleh Albirri, dkk (2020) membahas mengenai dimensi metrik ketetangaan lokal untuk operasi  $m$ -split dari graf roda  $(W_n)$  dan sejenisnya yakni graf friendship  $(F_n)$ , graf kipas  $(\mathcal{F}_n)$ , dan graf Jahangir  $(J_{2,n})$ . Penelitian tersebut menghasilkan teorema, yaitu  $dim_{A,l}(Spl_m(W_n)) = 2$  untuk  $3 \leq n \leq 8$  dan  $dim_{A,l}(Spl_m(W_n)) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$  untuk  $n \geq 9$ .  $dim_{A,l}(Spl_m(F_n)) = n$ ,  $dim_{A,l}(Spl_m(\mathcal{F}_n)) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$ , serta  $dim_{A,l}(Spl_m(J_{2,n})) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Penelitian ini belum ditemukan dimensi metrik ketetangaan lokalnya seperti yang disampaikan pada masalah terbuka untuk penelitiannya yakni mencari dimensi metrik ketetangaan lokal dari  $m$ -split untuk graf  $H_n$  untuk setiap  $n$

dan  $m$  dengan  $H$  merupakan sembarang graf (selain yang telah diteliti). Terakhir penelitian dari Bermudo dkk, (2022) berjudul “*The adjacency dimension of graphs*” yang mengkaji tentang batas-batas dimensi metrik ketetanggaan pada graf. Penelitian ini berhasil menentukan batas-batas dari dimensi metrik ketetanggaan pada graf serta hubungan dimensi metrik ketetanggaan dengan parameter yang lain.

Berdasarkan hal yang telah dipaparkan sebelumnya, penulis akan melakukan kajian tentang dimensi metrik ketetanggaan lokal pada  $m$ -split untuk graf tribun dalam rangka menjawab masalah terbuka yang disampaikan oleh Albirri, dkk (2020). Penelitian sebelumnya relevan dengan penelitian ini karena konsep yang digunakan penelitian sebelumnya berkaitan bahkan sama dengan dimensi metrik ketetanggaan lokal. Perbedaannya jenis graf yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu graf tribun dan graf terkait serta jenis operasi yang saya gunakan juga berbeda, yaitu  $m$ -split untuk graf. Hal ini merupakan sesuatu yang baru karena kondisi graf yang digunakan untuk penelitian ini tidak sama dengan penelitian sebelumnya. Kemudian, menciptakan teorema baru merupakan sebuah kajian dalam matematika khususnya dalam teori graf sehingga teorema-teorema yang dihasilkan juga belum tentu sama dengan hasil penelitian sebelumnya. Dari hal tersebut, diharapkan, dengan ditemukannya dimensi metrik ketetanggaan lokal dari  $m$ -split untuk graf tersebut, dapat memberikan kontribusi dalam mengembangkan teori yang ada pada graf sehingga penulis mengangkat suatu penelitian dengan judul “**Dimensi Metrik Ketetanggaan Lokal pada Operasi Split untuk Graf Tribun ( $\mathfrak{S}_n$ )**”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, adapun permasalahan yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini, yaitu berapa dimensi metrik ketetanggaan lokal pada operasi split untuk graf tribun dan graf yang terkait?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, adapun tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini, yaitu mengetahui dimensi metrik ketetanggaan lokal pada operasi split untuk graf tribun dan graf yang terkait.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Secara umum manfaat yang diharapkan dari penelitian yang dilakukan ini dibedakan menjadi dua, yaitu manfaat teoritis dan manfaat praktis. Adapun manfaat teoritis dan manfaat praktisnya adalah sebagai berikut:

### 1.4.1 Manfaat Teoritis

Adapun manfaat teoritis yang dapat diperoleh dari melakukan penelitian ini adalah menambah wawasan dan pengetahuan serta memberikan kontribusi berupa pemikiran pada bidang matematika mengenai teori graf khususnya topik dimensi metrik ketetanggaan lokal pada operasi split untuk graf tribun dan graf yang terkait.

### 1.4.2 Manfaat Praktis

#### 1. Bagi Peneliti

Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan terkait topik yang ada di teori graf yakni dimensi metrik ketetanggaan lokal pada operasi split untuk graf tribun dan graf yang terkait, mendapatkan pengalaman dalam melaksanakan penelitian dan menyusun karya ilmiah, serta dapat mengaplikasikan ilmu matematika yang sudah dipelajari.

#### 2. Bagi Pembaca

Menambah wawasan dan menjadi referensi pembaca mengenai dimensi metrik ketetanggaan lokal khususnya pada operasi split untuk graf tribun dan graf yang terkait. Kemudian diharapkan dapat menumbuhkan semangat dan memberikan inspirasi bagi pembaca agar dapat mengembangkan penelitian dalam topik dimensi metrik ketetanggaan lokal untuk graf yang lainnya serta diharapkan dapat dimanfaatkan sebagai salah satu sumber rujukan dalam melaksanakan penelitian yang sama.