

**BILANGAN KROMATIK *GRACEFUL* GANJIL PADA
GRAF HASIL KALI *CARTESIUS* $C_m \times G$**



PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN GANESHA

2024

**BILANGAN KROMATIK *GRACEFUL* GANJIL PADA
GRAF HASIL KALI *CARTESIUS* $C_m \times G$**

SKRIPSI



PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN GANESHA

2024

SKRIPSI

**DIAJUKAN UNTUK MELENGKAPI TUGAS
DAN MEMENUHI SYARAT-SYARAT UNTUK
MENCAPAI GELAR SARJANA**



Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si
NIP. 19650711 199003 1 003

Dr. I Wayan Puja Astawa, S.Pd., M.Stat. Sci.
NIP. 19690116 199403 1 001

Skripsi oleh Kadek Ria Andriani ini
telah dipertahankan di depan dewan penguji
pada tanggal 21 Mei 2024

Dewan Penguji.



Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si.
NIP. 19650711 199003 1 003



Dr. I Wayan Puja Astawa, S.Pd., M.Stat. Sci.
NIP. 19690116 199403 1 001



I Nyoman Budayana, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19901024 202012 1 005



Raphity Yanisari Silalahi, M.Sc.
NIP. 19930101 202203 2 020



Diterima oleh Panitia Ujian Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Pendidikan Ganesha

Guna memenuhi syarat-syarat untuk mencapai gelar sarjana

Pada :

Hari : Jumat

Tanggal : 7 Juni 2024



Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa karya tulis yang berjudul "Bilangan Kromatik Graceful Ganjil Pada Graf Hasil Kali Cartesius $C_m \times G$ " beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya sendiri dan saya tidak melakukan penjiplakan dan pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung risiko/sanksi yang dijatuhkan kepada saya apabila kemudian ditemukan adanya pelanggaran atas etika keilmuan dalam karya saya ini atau ada klaim terhadap keaslian karya saya ini.



Singaraja, 12 Juni 2024

Yang membuat pernyataan,

Kadek Ria Andriani

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa, karena dengan Rahmat dan berkat-Nyalah penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Bilangan Kromatik *Graceful* Ganjil Pada Graf Hasil Kali *Cartesius* $C_m \times G$ ”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat bagi calon sarjana untuk menyelesaikan jenjang pendidikan pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Pendidikan Ganesha.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah memberikan bimbingan, pengarahan dan membantu penulis baik secara langsung maupun tidak langsung, secara moril maupun materiil. Oleh sebab itu, penulis memberikan ucapan terima kasih yang tulus kepada :

1. Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dalam proses penyusunan skripsi yang senantiasa membimbing, memberikan arahan dan motivasi.
2. Dr. I Wayan Puja Astawa, S.Pd., M.Stat.Sci. selaku Dosen Pembimbing II dalam yang selalu memberikan arahan dan petunjuk dalam proses pembuatan penyusunan skripsi ini.
3. Raphita Yanisari Silalahi, M.Sc. selaku Dosen Penguji yang selalu membantu dalam proses penyusunan skripsi dan memberikan nasehat, saran dan motivasi serta bimbingan.
4. I Nyoman Budayana, S.Pd.,M.Sc. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran dan membantu dalam penyusunan skripsi ini.
5. Seluruh Dosen Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.
6. Bapak, ibu, saudara dan keluarga besar lainnya yang telah memberikan perhatian, kasih sayang, semangat dan doa yang tak pernah putus dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Teman-teman yang selalu memberikan dorongan moril dan sebagai tempat untuk sharing terkait penyusunan skripsi.

8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang turut membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga sangat diharapkan adanya saran dan kritik yang bersifat membangun sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Akhir kata, semoga tugas akhir ini memiliki manfaat bagi para mahasiswa, khususnya bagi mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Matematika dan bagi Perguruan Tinggi lainnya.



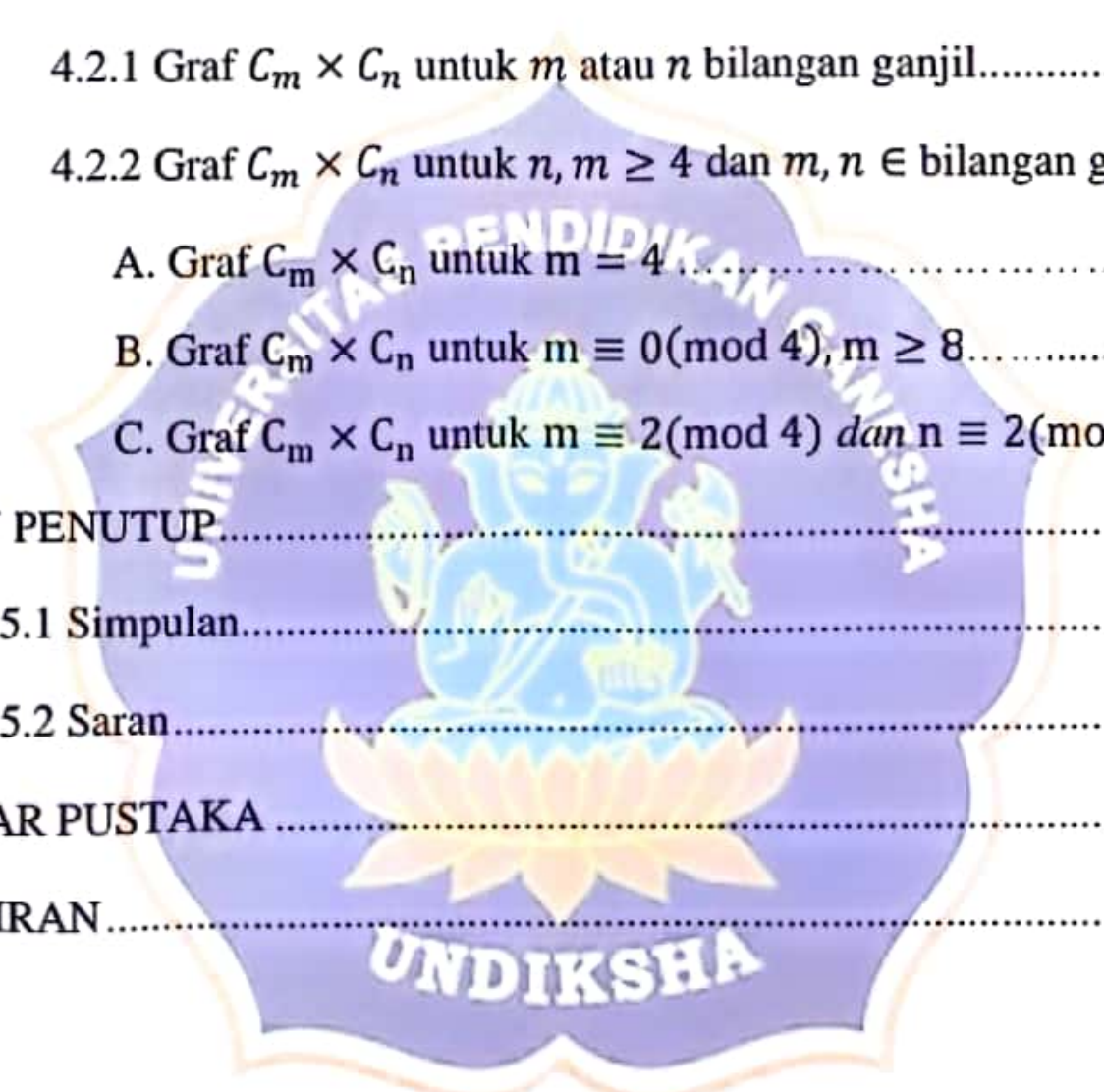
DAFTAR NOTASI

G	: Suatu graf G
$G = (V, E)$: Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E
$V(G)$: Himpunan titik pada graf G
$E(G)$: Himpunan sisi pada graf G
$ V(G) $: Jumlah titik pada graf G
$ E(G) $: Jumlah sisi pada graf G
$\chi(G)$: Bilangan kromatik
$\chi'(G)$: Indeks kromatik
$\chi_g(G)$: Bilangan kromatik graceful
$\chi_{og}(G)$: Bilangan kromatik graceful ganjil
C_n	: Graf lingkaran atau sikel dengan n titik
$C_m \times C_n$: Hasil kali kartesian dua graf lingkaran
P_n	: Graf lintasan dengan n titik
K_n	: Graf lengkap dengan n titik
N_n	: Graf nol
$d(v)$: Derajat dari titik v
$C_n \times P_{m+1}$: Hasil kali kartesian pada graf lingkaran dengan n titik dan lintasan dengan $m + 1$ titik
$L_{m,n}^*$: Graf ladder atau tangga khusus

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
ABSTRAK	iii
<i>ABSTRACT</i>	iv
DAFTAR NOTASI	v
DAFTAR ISI	vi
DAFTAR GAMBAR	viii
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA	5
2.1. Graf	5
2.2.1 Definisi Graf	5
2.2.2 Jenis – Jenis Graf	6
2.2.1 Operasi Pada Graf	11
2.2.2 Terminologi Graf	12
2.2. Pewarnaan Graf	15
2.3. Pelabelan <i>Graceful</i>	16
2.4. Pewarnaan <i>Graceful</i> Ganjil	18

2.5. Graf Torus $C_m \times C_n$	20
BAB III METODE PENELITIAN	23
3.1 Metode Penelitian.....	23
3.2 Prosedur Penelitian.....	23
BAB IV PEMBAHASAN	25
4.1 Definisi Titik pada Graf $L_{m+1,n+1}^*$	25
4.2 Pewarnaan pada Graf $C_m \times C_n$ atau $L_{m+1,n+1}^*$	25
4.2.1 Graf $C_m \times C_n$ untuk m atau n bilangan ganjil.....	25
4.2.2 Graf $C_m \times C_n$ untuk $n, m \geq 4$ dan $m, n \in$ bilangan genap	26
A. Graf $C_m \times C_n$ untuk $m = 4$	26
B. Graf $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 0(\text{mod } 4), m \geq 8$	40
C. Graf $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ dan $n \equiv 2(\text{mod } 4)$	42
BAB V PENUTUP	47
5.1 Simpulan.....	47
5.2 Saran.....	47
DAFTAR PUSTAKA	48
LAMPIRAN	50



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf 5 Titik dan 6 Sisi.....	5
Gambar 2.2 Graf Gelang dan Sisi Rangkap.....	6
Gambar 2.3 Graf Sederhana.....	6
Gambar 2.4 Graf Ganda dan Graf Semu.....	7
Gambar 2.5 Graf Berhingga.....	7
Gambar 2.6 Graf Arah.....	8
Gambar 2.7 Graf Bipartit.....	9
Gambar 2.8 Graf Lingkaran dengan 5 Titik (C_5).....	10
Gambar 2.9 Graf Lintasan dengan 5 Titik (P_5).....	10
Gambar 2.10 Graf Lengkap.....	10
Gambar 2.11 P_4 , P_3 dan Hasil Operasi Kombinasi P_4 dengan P_3	11
Gambar 2.12 P_2 , P_3 dan $P_3 + P_4$	11
Gambar 2.13 P_3 , P_4 dan $P_3 \times P_4$	12
Gambar 2.14 Contoh Perjalanan pada Graf.....	13
Gambar 2.15 Contoh Graf Bertetangga.....	13
Gambar 2.16 Contoh Graf Terpencil.....	14
Gambar 2.17 Contoh Dejarat pada Graf.....	14
Gambar 2.18 Subgraf.....	15
Gambar 2.19 Pewarnaan Titik, Pewarnaan Sisi dan Pewarnaan Muka.....	15
Gambar 2.20 Pelabelan <i>Graceful</i>	17
Gambar 2.21 Pelabelan <i>Graceful</i> Ganjil.....	17
Gambar 2.22 Pewarnaan <i>Graceful</i>	18
Gambar 2.23 Pewarnaan <i>Graceful</i> Ganjil.....	19
Gambar 2.24 Graf C_6 dan C_4	20
Gambar 2.25 Graf $C_6 \times C_4$	20
Gambar 2.26 Graf $C_4 \times P_7$	21

Gambar 2.27 Graf $L_{7,5}^*$	21
Gambar 4.1 Graf $L_{m+1,n+1}^*$	25
Gambar 4.2 Contoh Pewarnaan 9 Titik.....	27
Gambar 4.3 Pewarnaan Titik Berderajat Maksimum.....	27
Gambar 4.4 Kombinasi Posisi Titik Pada Case 1.....	28
Gambar 4.5 Siklus Pewarnaan Graf $L_{5,5}^*$ atau $C_4 \times C_4$	29
Gambar 4.6 Pewarnaan Manual Graf $L_{5,5}^*$ Pada Case 1.....	29
Gambar 4.7 Penentuan Label Titik.....	30
Gambar 4.8 Kombinasi Posisi Titik Pada Case 2.....	32
Gambar 4.9 Pewarnaan Manual Graf $L_{5,5}^*$ Pada Case 2.....	33
Gambar 4.10 Pewarnaan Manual Graf $L_{5,5}^*$ Pada Case 3.....	33
Gambar 4.11 Pendefinisian Titik dan Sisi pada Graf $L_{a,b}^*$	34
Gambar 4.12 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_{5,5}^*$ atau $C_4 \times C_4$	36
Gambar 4.13 Siklus Pewarnaan Graf $L_{5,9}^*$ atau $C_4 \times C_8$	37
Gambar 4.14 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_{9,5}$ atau $C_8 \times C_4$	37
Gambar 4.15 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_{7,5}^*$ atau $C_6 \times C_4$	40
Gambar 4.16 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_{5,7}^*$ atau $C_4 \times C_6$	40
Gambar 4.17 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_{9,11}^*$ atau $C_8 \times C_{10}$	41
Gambar 4.18 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_{13,13}^*$ atau $C_{12} \times C_{12}$	41
Gambar 4.19 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_{7,7}^*$ atau $C_6 \times C_6$	45
Gambar 4.20 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_{11,11}^*$ atau $C_{10} \times C_{10}$	46

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Pasangan Warna Minimum.....	28
Tabel 4.2 Pasangan Warna Minimum Case 2.....	31
Tabel 4.3 Pewarnaan Titik $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 4, n \equiv 0(mod 4)$ atau $L_{a,b}^*$ untuk $a = 5$ dan $b \equiv 1(mod 4)$	35
Tabel 4.4 Pewarnaan Sisi $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 4, n \equiv 0(mod 4)$ atau $L_{a,b}^*$ untuk $a = 5$ dan $b \equiv 1(mod 4)$	36
Tabel 4.5 Pewarnaan Titik $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 2(mod 4), n = 4$ atau $L_{a,b}^*$ untuk $a \equiv 3(mod 4)$ dan $b = 5$	38
Tabel 4.6 Pewarnaan Sisi $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 2(mod 4), n = 4$ atau $L_{a,b}^*$ untuk $a \equiv 3(mod 4)$ dan $b = 5$	39
Tabel 4.7 Pewarnaan Titik $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 2(mod 4), n \equiv 2(mod 4)$ atau $L_{a,b}^*$ untuk $a \equiv 3(mod 4)$ dan $b \equiv 3(mod 4)$	42
Tabel 4.8 Pewarnaan Sisi $C_m \times C_n$ untuk $m \equiv 2(mod 4), n \equiv 2(mod 4)$ atau $L_{a,b}^*$ untuk $a \equiv 3(mod 4)$ dan $b \equiv 3(mod 4)$	44



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Pewarnaan Pada Graf $L_{5,5}^*$	50
1.1 Pewarnaan Pada Graf $L_{5,5}^*$ Case 1 dengan Manual	50
1.2 Pewarnaan Pada Graf $L_{5,5}^*$ Case 1 dengan Pemograman	50
1.3 Pewarnaan Pada Graf $L_{5,5}^*$ Case 2 dengan Manual	56
1.4 Pewarnaan Pada Graf $L_{5,5}^*$ Case 2 dengan Pemograman	60
1.5 Pewarnaan Pada Graf $L_{5,5}^*$ Case 3 dengan Manual	68
1.6 Pewarnaan Pada Graf $L_{5,5}^*$ Case 3 dengan Pemograman	69
Lampiran 2. Riwayat Hidup.....	73
Lampiran 3. Pernyataan Keaslian Tulisan.....	74

