BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Banyaknya permasalahan dalam kehidupan sehari-hari mendorong manusia untuk mencari solusi, yang secara tidak langsung permasalahan tersebut dapat mendorong berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak memberikan alternatif dalam permasalahan segala bidang. Salah satu cabang matematika yang dapat menyelesaikan suatu permasalahan adalah teori graf (Clipperton dkk.,2008:1).

Pada tahun 1736, konsep teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang matematikawan asal Swiss pada sebuah karya tulis yang berjudul "*Solution problematics ad geometrian situs pertinensi"*. Karya tersebut berisikan tentang upaya pemecahan masalah jembatan di Sungai Pregel, Konigsberg, Rusia. Masalah jembatan itu adalah kemungkinan untuk melewati tujuh jembatan di kota Konisberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi di tempat semula. Untuk memecahkan permasalahan tersebut, Euler mengibaratkan daerah atau daratan sebagai titik (*vertex*) dan tujuh jembatan dinyatakan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan titik atau daerah tersebut (Sutarno dkk., 2003). Euler berkesimpulan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melewati tujuh jembatan itu, masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Oleh sebab itu, permasalahan ini dikenal dengan sejarah lahirnya Teori Graf, dengan memodelkan semua permasalahan menjadi bentuk titik dan garis atau sisi (Chang, 2000).

Teori Graf dalam matematika adalah cabang kajian yang mempelajari tentang sifat-sifat graf. Secara umum, graf adalah himpunan titik atau simpul (*vertex / node*) yang terhubung oleh sisi (*edge*) dan busur (*arc*). Biasanya graf diilustrasikan sebagai kumpulan titik-titik yang dihubungkan oleh beberapa garis atau garis yang berpanah (melambangkan busur). Satu titik dapat disebut dengan graf. Suatu graf dinyatakan sebagai $G = (V, E)$. Graf G terdiri atas himpunan V yang berisikan simpul atau titik pada graf dan himpunan E yang berisi sisi pada graf tersebut. Sisi terbentuk karena adanya dua titik yang saling terhubung, sehingga himpunan E dinyatakan sebagai pasangan dari titik yang ada pada V (Harju., 2012). Suatu sisi yang menghubungkan titik dengan titik yang sama yang disebut dengan gelang (*loop*). Sebuah struktur graf bisa dikembangkan dengan memberikan bobot tiap sisi. Graf berbobot dapat digunakan untuk melambangkan banyak konsep berbeda.

Teori graf memiliki aplikasi yang sangat luas. Saat ini teori graf semakin berkembang karena keunikan dan penerapannya. Salah satu topik penelitian yang terus mengalami perkembangan adalah pewarnaan graf (*graph coloring*). Pewarnaan graf adalah proses pemberian warna pada titik dan sisi suatu graf dengan syarat titik dan sisi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Graf yang sama dapat memiliki jumlah warna yang berbeda, sehingga pada pewarnaan graf, dapat ditentukan warna minimum atau dikenal dengan istilah bilangan kromatik. Bilangan kromatik yang disimbolkan dengan $\chi(\mathrm{G})$ adalah bilangan paling kecil atau minimum yang diperlukan untuk mewarnai setiap titik pada graf G, dan bilangan paling kecil yang digunakan untuk mewarnai setiap sisi disebut dengan indeks kromatik $\chi'(\mathrm{G})$. Sedemikian sehingga dua titik dan dua sisi yang terhubung memiliki warna yang berbeda.

Selain pewarnaan, pada teori graf juga terdapat pelabelan. Pelabelan merupakan pemetaan unsur himpunan titik dan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan yang hanya menggunakan domain berupa titik disebut dengan pelabelan titik dan apabila domainnya berupa himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi, sedangkan pelabelan yang domainnya gabungan dari titik dan sisi disebut dengan pelabelan total. Ada banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan *graceful*. Pelabelan *graceful* pada graf $G(V, E)$ adalah fungsi injektif $f: V(G) \to \{0,1,2, \dots, |E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif $f': E(G) \to \{1,2, \dots, |E|\}$ dimana setiap sisi $uv \in E(G)$ berlaku $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$.

Pelabelan *graceful* terus mengalami perkembangan dan telah diteliti oleh beberapa peneliti. Pelabelan *graceful* ganjil adalah pengembangan dari pelabelan *graceful*. Misalkan graf $G(V, E)$ adalah graf dengan m sisi, pelabelan *graceful* ganjil adalah sebuah fungsi injektif $f: \to \{0,1,2, \dots, 2m - 1\}$ sedemikian sehingga setiap sisi $uv \in E(G)$ berlaku $V(G) f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ maka label sisinya adalah $f': E(G) \to \{1,3,5, \dots, 2m - 1\}$.

Untuk memperluas pelabelan *graceful*, terdapat konsep bilangan kromatik *graceful* yang dikenalkan oleh Gary Chartrand pada 2015. Sebuah pewarnaan *graceful*-k pada graf tak kosong $G = (V, E)$ adalah pewarnaan titik $f: V(G) \to \{1,2, \dots, k\}, k \geq 2$, dimana menginduksi pewarnaan sisi $f^*: E(G) \to \{1,2, \dots, k - 1\}$ didefinisikan dengan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$. Nilai minimum k pada G yang memiliki pewarnaan *graceful*-k disebut bilangan kromatik *graceful* $\chi_g(\mathrm{G})$.

Saat ini bilangan kromatik *graceful* menjadi topik hangat pada penelitian yang berkaitan dengan graf. Berbagai jenis graf telah diteliti untuk mencari bilangan kromatik *graceful*. Pada tahun 2023, I Dewa Agung Ayu Risma Cahyani Putri telah berhasil menyelesaikan tugas akhir dengan membuktikan bilangan kromatik *graceful* pada graf torus $C_m \times C_n$.

Suparta, dkk. (2003) mengembangkan kromatik *graceful* yaitu dengan menentukan bilangan kromatik pada pewarnaan *graceful* ganjil. Pewarnaan *graceful* yang dapat menginduksi warna sisi bilangan ganjil disebut dengan pewarnaan *graceful* ganjil. Pada penelitiannya dibuktikan bahwa tidak semua graf dapat dilakukan pewarnaan *graceful* ganjil. Nilai minimum k pada pewarnaan *graceful* ganjil pada graf G disebut dengan bilangan kromatik *graceful* ganjil atau dinotasikan dengan $\chi_{og}(\mathrm{G})$. Pada graf C_m untuk m bilangan ganjil ternyata tidak dapat dilakukan pewarnaan *graceful* ganjil. Oleh sebab itu, penulis ingin melakukan penelitian pewarnaan *graceful* ganjil pada graf $C_m \times G$ dan menentukan bilangan kromatiknya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik *graceful* pada graf hasil kali *cartesius* pada graf $C_m \times G$, dimana graf G yang akan diteliti adalah graf C_n.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yaitu sebagai berikut.

1. Mengetahui apakah graf $C_m \times G$ dengan G adalah graf C_n dapat dilakukan pewarnaan *graceful* ganjil.
2. Mengetahui berapa bilangan kromatik *graceful* ganjil pada graf $C_m \times G$ atau $C_m \times C_n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini diantaranya adalah sebagai berikut.

1. Bagi Peneliti

   Manfaat bagi peneliti adalah dapat memberikan pemahaman dan pengetahuan mengenai bilangan kromatik *graceful* ganjil terutama pada graf dengan operasi hasil kali *cartesius*, serta dapat mengembangkan kemampuan dalam melakukan penelitian.
2. Bagi Pembaca

   Manfaat bagi pembaca adalah dapat dijadikan sumbang saran atau panduan yang akan melakukan penelitian terkait bilangan kromatik *graceful* ganjil.