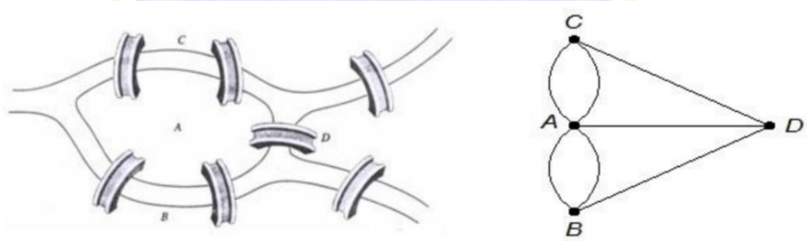
BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Di Negara Jerman bagian Prusia Timur, tepatnya di Kota Königsberg, muncul permasalahan mengenai jembatan Königsberg, yaitu: apakah mungkin untuk melintasi ketujuh jembatan Königsberg tepat satu kali dan kemudian kembali ke titik awal?. Beberapa masyarakat yang ada di Kota Königsberg sepakat bahwa memang tidak mungkin untuk melintasi setiap jembatan sekali saja dan kembali ke posisi awal, tetapi mereka tidak dapat memberikan penjelasan mengenai hal ini selain coba-coba (Daniel, 2019).

Solusi mengenai permasalahan tersebut pertama kali ditemukan pada tahun 1736 oleh ahli matematika yang bernama Leonhard Euler dengan cara mengubah permasalahan menjadi model graf. Jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi dan daratan yang dihubungkan oleh jembatan dinyatakan sebagai titik yang disebut simpul. Huruf A, B, C, dan D digunakan untuk mengidentifikasi setiap titik (Buhaerah dkk., 2022). Gambar 1 adalah graf yang dibuat oleh Euler.



Gambar 1.1 Graf yang Merepresentasikan Jembatan Königsberg

Dengan mengubah permasalahan ke dalam graf, Leonhard Euler menjelaskan bahwa derajat pada gambar 1.1 tidak seluruhnya genap, sehingga tidak mungkin manusia dapat melintasi ketujuh jembatan tersebut satu kali dan kemudian kembali ke titik awalnya (Rahayuningsih, 2018). Terjadi penurunan dalam bidang teori graf, sampai pada tahun 1936 seorang ilmuwan matematika yang bernama D. Konig menulis buku pertama yang membahas mengenai teori graf (Maulani, 2023). Sejak tahun 1936, graf mulai sering digunakan sebagai alat untuk memecahkan berbagai permasalahan dunia nyata, termasuk perhitungan jalur terpendek.

Salah satu topik teori graf yang digunakan untuk menghitung jalur terpendek adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada titik, sisi, atau keduanya pada suatu graf yang menggunakan beberapa warna dengan memenuhi syarat tertentu.

Salah satu jenis pewarnaan graf adalah pewarnaan *graceful*. Pewarnaan *graceful* merupakan pengembangan dari topik pelabelan *graceful* yang pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dan Zhang pada tahun 2015. Pewarnaan *graceful* merupakan pemberian warna pada setiap titik dan sisi dimana warna yang digunakan boleh berulang baik pada himpunan titik maupun sisinya dengan syarat setiap titik ataupun sisi yang bertetangga pada graf tersebut memiliki warna yang berbeda (Dhami, 2017). Pemberian warna setiap sisi merupakan selisih dari dua titik yang bertetangga. Minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada graf G, sehingga setiap titik yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama disebut dengan bilangan kromatik *graceful* pada graf (G) yang dinotasikan dengan $\chi_g(G)$ (Dhami, 2017).

Penelitian mengenai bilangan kromatik *graceful* pada beberapa graf telah banyak dilakukan, diantaranya yaitu: penelitian yang dilakukan oleh (Bi dkk., 2017) telah menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf lingkaran dengan n titik C_n

yaitu $\chi_g(C_n) = 4$ untuk $n \neq 5$ dan $\chi_g(C_n) = 5$ untuk $n = 5$. Selain itu (Bi dkk., 2017) juga telah menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf lintasan dengan n titik P_n yaitu $\chi_g(P_n) = 4$ untuk $n \geq 5$. Penelitian yang dilakukan oleh (Suparta dkk., 2023) telah menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf prisma $D_{m,2}$ yaitu $\chi_g\left(D_{m,2}\right) = 5$ untuk $m \equiv 0(mod\ 4)$ dan $\chi_g\left(D_{m,2}\right) = 6$ untuk lainnya.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh (Suparta dkk., 2023), penelitian ini berfokus untuk mengkaji bilangan kromatik *graceful* graf kali kartesius antara graf prisma $D_{m,2}$ dan graf lintasan P_n yaitu graf $D_{m,2} \times P_n$. Penelitian mengenai bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m, n \geq 3$ menjadi menarik untuk dilakukan mengingat $D_{m,2}$ merupakan subgraf bagian dari graf $D_{m,2} \times P_n$ yang dimungkinkan untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ memiliki bilangan kromatik *graceful* yang sama dengan graf $D_{m,2}$ atau graf $D_{m,2} \times P_n$ memiliki bilangan kromatik yang berbeda dengan graf $D_{m,2}$ karena derajat dari graf $D_{m,2} \times P_n$ berbeda dengan derajat graf $D_{m,2}$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah berapa bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$?.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dipaparkan, penelitian ini memiliki tujuan mengkaji berapa bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian mengenai bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ diharapkan dapat menambah wawasan, pengetahuan, dan memberikan sumbangsi pemikiran pada bidang matematika khususnya dalam teori graf tentang bilangan kromatik hasil kali kartesius.