

**INDEKS WIENER DAN INDEKS HARARY DARI GRAF
NILPOTEN DARI GELANGGANG BILANGAN BULAT
MODULO**



OLEH

ELSA CINDY TAMARA

NIM 2013101012

PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN GANESHA

2025



**INDEKS WIENER DAN INDEKS HARARY DARI GRAF
NILPOTEN DARI GELANGGANG BILANGAN BULAT
MODULO**

SKRIPSI

Diajukan Kepada

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Pendidikan Ganesha

Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam Menyelesaikan

Program Sarjana Sains (S.Si)

OLEH

ELSA CINDY TAMARA

NIM 2013101012

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN GANESHA

SINGARAJA

2025

SKRIPSI
DIAJUKAN UNTUK MELENGKAPI TUGAS
DAN MEMENUHI SYARAT-SYARAT
UNTUK MENCAPAI GELAR SARJANA SAINS



Pembimbing I,

Putu Kartika Dewi, S.Pd., M.Sc

NIP. 199004202019032021

Pembimbing II,

Dr. Gede Suweken, M.Sc

NIP. 196111111987021001

Skripsi oleh Elsa Cindy Tamara

Telah dipertahankan di depan dewan penguji

Pada tanggal 26 Februari 2025

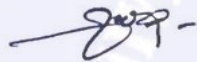
Dewan Penguji,



Putu Kartika Dewi, S.Pd., M.Sc

(Ketua)

NIP. 199004202019032021



Dr. Gede Suweken, M.Sc

(Anggota)

NIP. 196111111987021001



Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si

(Anggota)

NIP. 196507111990031003



I Nyoman Budayana, S.Pd., M.Sc

(Anggota)

NIP. 199010242020121005

Diterima oleh Panitia Ujian Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Pendidikan Ganesha guna memenuhi syarat-syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains.

Pada:

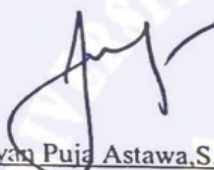
Hari : Rabu


Tanggal : 26 Februari 2025

Mengetahui,

Ketua Ujian,

Sekretaris Ujian,


Dr. I Wayan Pujastawa, S. Pd., M. Stat. Sci.


I Nyoman Budayana, S. Pd., M. Sc.


NIP. 196901161994031001

NIP. 199010242020121005

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam




Dr. I Wayan Sukra Warpala, S. Pd., M. Sc.

NIP. 196710131994031001

v

v

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa karya yang berjudul “Indeks Wiener dan Indeks Harary dari Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo” beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya sendiri dan saya tidak melakukan penjiplakan dan pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung resiko/sanksi yang dijatuhkan kepada saya apabila kemudian ditemukan adanya pelanggaran atas etika keilmuan dalam karya saya ini atau ada klaim terhadap keaslian karya saya ini.

Singaraja, 26 Februari 2025

Yang membuat pernyataan,



Elsa Cindy Tamara

NIM 2013101012

PRAKATA

Bismillaahirrohmaanirrohiim. Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatu.

Puji syukur penulis ucapkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul **“Indeks Wiener dan Indeks Harary dari Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo”** tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan penelitian ini, terkhusus kepada:

1. Putu Kartika Dewi, S.Pd., M.Sc., selaku dosen pembimbing I yang sangat sabar, cermat, dan teliti untuk memberikan bimbingan, kritik, petunjuk serta semangat dan motivasi yang sangat membangun untuk penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dari awal hingga selesai.
2. Dr. Gede Suweken, M.Sc., selaku dosen pembimbing II yang sangat sabar, cermat, dan teliti untuk memberikan bimbingan, kritik, petunjuk serta semangat dan motivasi yang sangat membangun untuk penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dari awal hingga selesai.
3. Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si., selaku dosen penguji I yang telah memberikan masukan yang membangun dalam skripsi penulis.
4. I Nyoman Budayana, S.Pd., M.Sc., selaku dosen penguji II yang telah memberikan masukan yang membangun dalam skripsi penulis.
5. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Universitas Pendidikan Ganesha yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis.
6. Kepada Ibuku tersayang, Ibu Sukaeni perempuan hebat yang telah membesarkan dan mendidik penulis hingga mendapatkan gelar sarjana serta selalu menjadi penyemangat bagi penulis. Terimakasih untuk segala doa ibu yang sangat luar biasa, kasih sayang, nasihat, motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan karya tulis yang sederhana ini, semoga ibu sehat selalu dan panjang umur supaya ibu dapat menikmati hasil keringat yang dicurahkan kepada penulis secara mandiri tanpa bantuan seorang suami. Semoga Allah memberikan rejeki yang berlimpah baik segi kesehatan, materiil, dan dijauhkan dari orang-orang yang iri maupun dengki. Aamiin YRA.
7. Kepada Bapak kandungku, Bapak Agus Suparman, selaku bapak yang telah menghadirkan Elsa kedunia ini. Walaupun bapak tidak menjalankan kewajiban sejak Elsa umur 2 tahun. Semoga bapak mendapatkan balasan

yang setimpal dengan yang dilakukan kepada Ibu, dan Elsa. Semoga bapak tobat, ingat ke ibu dan Elsa. Walaupun sampai sekarang bapak sudah memiliki keluarga baru lagi, dan tidak akan menemui kita semoga bapak bisa datang ke acara wisuda anak tunggalmu ini. Aamiin YRA.

8. Kepada Pak Sony, Pak Ari, Om Kentut, keluarga besar Padhe Radik dan Mbak Nita, serta keluarga besar R. Kismadi, dan orang-orang yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu selaku donator selama penulis melakukan pendidikan.
9. AFR, S.Pi selaku *secreet admire* penulis *since 2015 until now*. Terimakasih atas doa, masukan, saran, dan motivasi yang telah diberikan kepada penulis. Semoga kita tetap akan selalu berteman selamanya.
10. Sahabat penulis dari SMP sampai sekarang yang paling *gatheli* Mbutil, S.Ak, yang senantiasa selalu memberikan saran, dorongan, motivasi, fasilitas, dan mengingatkan penulis untuk terus mengerjakan skripsi ini.
11. Wong2an Sawah selaku teman, sahabat, saudara yang telah membantu mendengarkan keluh kesah dari penulis, menemani VCan penulis malam-malam untuk mengerjakan skripsi ini.
12. Rofi B, Clara Juleisa, Karina Sabitah, Iping, Tiwik selaku partner yang senantiasa selalu mengajak pergi penulis untuk menghilangkan *stress* dalam pengerjaan skripsi ini.
13. *Ueno Family Japan (Natsuki, Ritsuki, Umma Mega)* yang telah membuat ketawa penulis dikala sedih, terpuruk, dan saat sedang tidak bersemangat.
14. Guyon Waton, NDX AKA karena lagu-lagunya sangat *related* di kehidupan percintaan yang membuat penulis bersemangat untuk bangkit kembali menjadi pribadi yang lebih baik.
15. Terakhir, kepada Elsa Cindy Tamara, ya! diri saya sendiri. Apresiasi sebesar-besarnya karena telah bertanggung jawab untuk menyelesaikan apa yang telah dimulai. Terimakasih karena terus berusaha dan tidak menyerah, serta senantiasa menikmati setiap suka cita dalam prosesnya yang sangat tidak mudah ini. Terima Kasih karena selalu melibatkan Allah SWT dalam setiap perjuangan dan mengizinkan Allah sebagai sandaran penulis dikala sedih maupun senang. Semoga Elsa selalu berserah diri kepada Allah SWT. Semoga Allah memberikan rejeki yang berlimpah baik segi kesehatan, materiil, dan dijauhkan dari orang-orang yang iri maupun dengki. Aamiin YRA. Terimakasih sudah bertahan.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga dengan kerendahan hari penulis mohon maaf sebesar-besarnya jika terdapat kesalahan dalam skripsi ini. Penulis juga mengharapkan kritik serta

saran yang bersifat membangun dari berbagai pihak. Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak. Akhir kata penulis sampaikan Terima Kasih.

Singaraja, 26 Februari 2025

Penulis



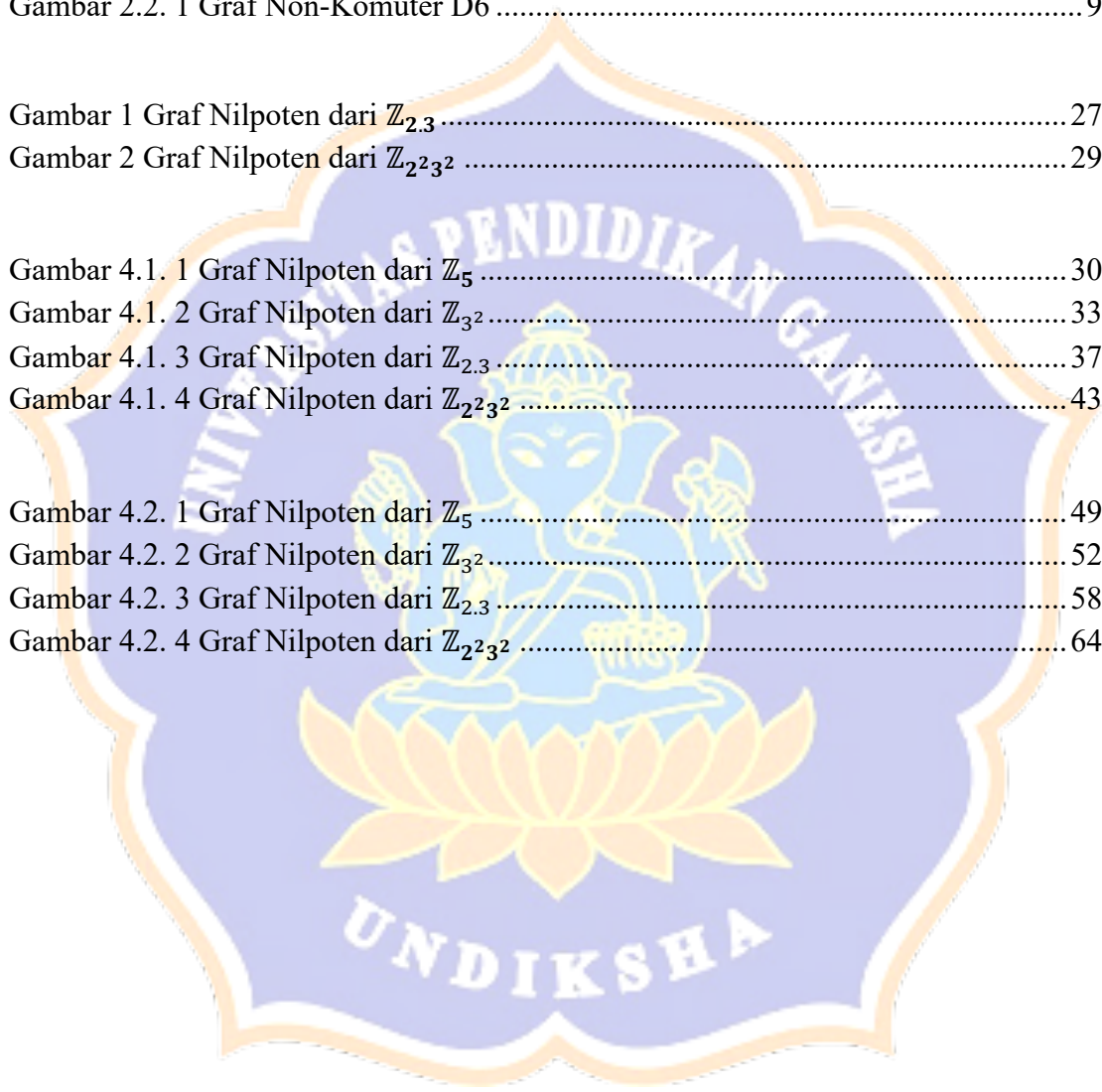
DAFTAR ISI

SAMPUL DALAM.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
PERNYATAAN.....	vi
PRAKATA.....	vii
ABSTRAK.....	x
ABSTRACT.....	xi
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiv
DAFTAR TABEL.....	xv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Pembatasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan Penelitian.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA.....	6
2.1 Graf.....	6
2.1.1. Definisi Graf.....	6
2.1.2. Graf Terhubung.....	7
2.1.3. Derajat dan Jarak.....	7
2.2 Indeks Topologi.....	8
2.3 Gelanggang Bilangan Bulat Modulo n (\mathbb{Z}_n).....	14
2.4 Graf Nilpoten dari $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$	16
2.5 Penelitian yang Relevan.....	19
BAB III METODE PENELITIAN.....	22
3.1 Jenis Penelitian.....	22

3.2	Fokus Penelitian	22
3.3	Prosedur Penelitian.....	22
BAB IV PEMBAHASAN.....		25
4.1	Indeks Wiener dari Graf Nilpoten pada Gelanggang Bilangan Bulat Modulo	30
4.1.1	Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dari Bilangan Prima \mathbb{Z}_p	30
4.1.2	Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dari Bilangan Prima Berpangkat \mathbb{Z}_{p^k}	33
4.1.3	Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dari Perkalian Dua Bilangan Prima $\mathbb{Z}_{p.q}$	37
4.1.4	Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dari Perkalian Dua Bilangan Prima Berpangkat $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$	42
4.2	Indeks Harary dari Graf Nilpoten pada Gelanggang Bilangan Bulat Modulo	49
4.2.1	Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dari Bilangan Prima \mathbb{Z}_p	49
4.2.2	Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dari Bilangan Prima Berpangkat \mathbb{Z}_{p^k}	52
4.2.3	Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dari Perkalian Dua Bilangan Prima $\mathbb{Z}_{p.q}$	58
4.2.4	Gelanggang Bilangan Bulat Modulo dari Perkalian Dua Bilangan Prima Berpangkat $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$	63
BAB V PENUTUP.....		72
5.1	Kesimpulan	72
5.2	Saran.....	73
DAFTAR PUSTAKA		74
LAMPIRAN.....		75
RIWAYAT HIDUP.....		76

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. 1 Graf G.....	6
Gambar 2.1. 2 Graf F dan Graf H	7
Gambar 2.1. 3 Graf H3	7
Gambar 2.2. 1 Graf Non-Komuter D6	9
Gambar 1 Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2,3}$	27
Gambar 2 Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2^2 3^2}$	29
Gambar 4.1. 1 Graf Nilpoten dari \mathbb{Z}_5	30
Gambar 4.1. 2 Graf Nilpoten dari \mathbb{Z}_{3^2}	33
Gambar 4.1. 3 Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2,3}$	37
Gambar 4.1. 4 Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2^2 3^2}$	43
Gambar 4.2. 1 Graf Nilpoten dari \mathbb{Z}_5	49
Gambar 4.2. 2 Graf Nilpoten dari \mathbb{Z}_{3^2}	52
Gambar 4.2. 3 Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2,3}$	58
Gambar 4.2. 4 Graf Nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2^2 3^2}$	64



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1. 1 Jarak antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_5)$	31
Tabel 4.1. 2 Jarak antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$	33
Tabel 4.1. 3 Jarak antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{2,3})$	37
Tabel 4.1. 4 Jarak antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$	43
Tabel 4.2. 1 Jarak antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_5)$	49
Tabel 4.2. 2 Jarak antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$	53
Tabel 4.2. 3 Jarak antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{2,3})$	58
Tabel 4.2. 4 Jarak antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$	64

