BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Selama ini, kemajuan teknologi informasi berlangsung dengan begitu cepat. Laju perkembangan tersebut didorong oleh beragam tantangan yang dihadapi manusia dalam kehidupan sehari-hari. Para ilmuwan berperan penting dalam merespons tantangan ini dengan memberikan solusi atas berbagai persoalan. Perkembangan teknologi juga sangat bergantung pada bidang-bidang ilmu tertentu, salah satunya adalah matematika. Sebagai ilmu dasar yang menjadi fondasi banyak disiplin lainnya, matematika berkontribusi besar dalam mendukung kemajuan pengetahuan ilmiah, teknologi, serta pemikiran manusia. Matematika melatih individu untuk mengembangkan pola pikir yang rasional, kritis, dan terstruktur. Oleh sebab itu, pendekatan matematika dapat diterapkan dalam menyelesaikan berbagai jenis masalah, baik yang bersifat sederhana maupun kompleks, dengan cara mengenali akar permasalahan dan secara runtut mencari solusinya.

Teori graf, yang merupakan bagian dari matematika, memiliki daya tarik untuk dipelajari lebih dalam karena penerapan yang luas. Dalam teori ini, graf digunakan sebagai sarana untuk menggambarkan objek-objek diskrit dan relasi yang muncul antara objek-objek tersebut. Konsep awal teori graf dikenalkan oleh Leonard Euler, seorang matematikawan asal Swiss, pada tahun 1736 ketika ia mencoba memecahkan persoalan jembatan Könisgberg (Munir, 2010). Kemudian pada tahun 1847, G.R. Kirchoff mengembangkan teori pohon, juga dikenal sebagai "*tree theory*" untuk menyelesaikan permasalahan jaringan listrik. Sepuluh tahun setelah itu, A. Coyley (1821–1895) juga menggunakan gagasan tentang pohon untuk menjelaskan struktur senyawa hidrokarbon dalam kimia. Pada masa yang sama dengan munculnya ide-ide dari Kirchoff dan Coyley, dua konsep utama dalam teori graf turut berkembang, salah satunya adalah konjektur empat warna. Konjektur ini menyatakan bahwa empat warna sudah cukup untuk mewarnai peta sehingga setiap wilayah yang berbatasan langsung tidak memiliki warna yang sama (Rahayuningsih, 2018).

Graf telah terbukti berfungsi sebagai pemodelan yang efektif untuk berbagai masalah dalam bidang ilmu pengetahuan, ilmu komputer, dan riset operasi. Graf sangat penting dalam ilmu komputer. Dengan menggunakan aplikasi graf, kita dapat membuat sistem transportasi dan mengatur distribusi listrik atau air yang efisien. Selain itu, jaringan interaksi antara gen dalam biologi dapat digambarkan dalam bentuk graf. Akibatnya, teori graf telah digunakan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan (Aziz, 2021). Seiring dengan berkembangnya penerapan teori graf dalam berbagai bidang ilmu, pemaparan mengenai definisi dan struktur dasar graf menjadi landasan awal. Secara umum, graf $G = (V, E)$ merupakan sebuah struktur yang dibentuk oleh dua buah himpunan, yaitu himpunan V yang tidak kosong serta himpunan E. Elemen V disebut simpul (*points* atau *nodes*), sedangkan elemen E disebut sisi (*lines* atau *arcs*) (Beseri, 2004; Dewi dkk., 2018).

Teori graf mencakup beragam topik kajian, pewarnaan graf merupakan salah satu bidang yang cukup banyak diteliti. Jenis-jenis pewarnaan yang umum dipelajari meliputi pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, serta pewarnaan wilayah (Zhang, 2016). Dari semua pewarnaan ini, pewarnaan graf yang paling banyak dipelajari dan paling populer adalah pewarnaan titik (Zhang, 2016). Pewarnaan simpul adalah mewarnai titik suatu graf sedemikian rupa sehingga dua simpul yang saling terhubung tidak memiliki warna yang sama (Umamaheswari & Umavathi, 2019). Sementara itu, pewarnaan sisi dilakukan dengan memberikan warna pada setiap sisi graf, dengan ketentuan bahwa dua sisi yang saling terhubung pada titik yang sama tidak boleh diberi warna yang sama (Beseri, 2004). Adapun pewarnaan wilayah melibatkan pemberian warna pada masing-masing bidang dalam graf, dengan syarat bahwa dua bidang yang berbatasan tidak menggunakan warna yang sama (Rosen, 2019).

Dari berbagai jenis pewarnaan graf, pewarnaan graceful menjadi topik yang menarik untuk dikaji. Pewarnaan graceful untuk graf G adalah pewarnaan titik $c : V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$, di mana k adalah suatu bilangan bulat positif, yang menginduksi pewarnaan sisi $|c(u) - c(v)|$, untuk setiap sisi $uv \in V(G)$. Bilangan k terkecil yang membuat c menjadi pewarnaan graceful untuk G disebut sebagai bilangan kromatik graceful graf G, dan dilambangkan dengan $\chi_g(G)$. Jelas bahwa setiap graf memiliki pewarnaan graceful (Suparta dkk., 2023).

Salah satu objek graf yang menarik untuk diterapkan dalam konteks pewarnaan adalah graf hasil operasi *comb*. Operasi *comb* graf tangga dengan graf lintasan dilambangkan sebagai $L_n \rhd P_m$ yang didapatkan dengan mengambil satu salinan graf tangga L_n, kemudian buat salinan graf lintasan P_m sebanyak jumlah simpul dari L_n. Selanjutnya, setiap simpul u pada salinan graf P_m ke-i dilekatkan dengan simpul ke-i pada graf L_n. Operasi *comb* graf tangga dengan graf lingkaran dilambangkan sebagai $L_n \rhd C_m$ yang didapatkan dengan mengambil satu salinan graf tangga L_n, kemudian buat salinan graf lingkaran C_m sebanyak jumlah simpul dari L_n. Selanjutnya, setiap simpul u pada salinan graf C_m ke-i dilekatkan dengan simpul ke-i pada graf L_n. Operasi *comb* graf tangga dengan graf bintang dilambangkan sebagai $L_n \rhd S_m$ yang didapatkan dengan mengambil satu salinan graf tangga L_n, kemudian buat salinan graf bintang S_m sebanyak jumlah simpul dari L_n. Selanjutnya, setiap simpul u pada salinan graf S_m ke-i dilekatkan dengan simpul ke-i pada graf L_n.

Penentuan bilangan kromatik graceful telah banyak dilakukan oleh peneliti sebelumnya. Eko Waluyo pada tahun 2023 dengan penelitiannya yang berjudul "Pewarnaan Graceful pada Graf Hasil Operasi *Comb* Graf Siklus dan Graf *Star*". Dalam penelitian tersebut ditemukan bahwa $\chi_g(C_n \rhd S_m)$ adalah $m + 7$ untuk $n \equiv 1 \; mod \; 3$, $m + 7$ untuk $n \equiv 2 \; mod \; 3$ dan $m + 6$ untuk $n \equiv 0 \; mod \; 3$ (Rudi dkk., 2023).

Pada penelitian (Lestari dkk., 2024) yang berjudul "Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Sentripetal", telah ditemukan bahwa bilangan kromatik graceful pada keluarga graf sentripetal, yaitu pada graf gurita (O_n) untuk $n \geq 2$ adalah $\chi_g(O_n) = 2n + 1$, pada graf sandat (St_n) untuk $n \geq 3$ adalah $\chi_g(St_n) = 3n + 1$, pada graf kincir angin belanda

(D_3^m) untuk $m \geq 2$ adalah $\chi_g(D_3^m) = 2m + 1$, dan pada graf gunung api (V_n) untuk $n \geq 3$ adalah $\chi_g(V_n) = n + 3$.

Meskipun pewarnaan graceful sudah diteliti secara mendalam, pewarnaan graceful mengalami perkembangan menjadi pewarnaan graceful ganjil dan sudah diteliti oleh beberapa peneliti. Suatu graf dikatakan memiliki pewarnaan graceful ganjil apabila c juga memenuhi sifat tambahan bahwa setiap warna sisi yang diinduksi adalah ganjil, maka pewarnaan c disebut pewarnaan graceful ganjil. Jika pewarnaan graceful ganjil c ada untuk G, maka bilangan k terkecil yang mempertahankan c sebagai pewarnaan graceful ganjil untuk G, disebut sebagai bilangan kromatik graceful ganjil dan dilambangkan dengan $\chi_{og}(G)$ (Suparta dkk., 2023).

Penelitian mengenai pewarnaan graceful ganjil yang telah dilakukan oleh sejumlah peneliti sebelumnya, salah satunya oleh (Suparta dkk., 2023) telah memaparkan hasil bilangan kromatik graceful ganjil dari beberapa graf seperti graf lintasan, graf lingkaran, dan graf lainnya. Adapun bilangan kromatik graceful ganjil dari graf lintasan $\chi_{og}(P_2) = 2$, $\chi_{og}(P_3) = 4$, $\chi_{og}(P_5) = 5$. Bilangan kromatik graceful ganjil dari graf lingkaran $\chi_{og}(C_n) = 5$, jika $n \equiv 0\ (mod\ 4)$, $\chi_{og}(C_n) = 6$, jika $n \equiv 2\ (mod\ 4)$, dan $\chi_{og}(C_n) = \infty$, jika n ganjil.

Meskipun beberapa peneliti telah mengidentifikasi bilangan kromatik graceful dan graceful ganjil untuk berbagai jenis graf, masih terdapat beberapa graf yang belum dikaji bilangan kromatik ganjilnya, salah satunya adalah graf hasil operasi *comb* graf tangga. Kekosongan pengetahuan ini mendorong dilakukannya penelitian lebih lanjut untuk menentukan bilangan kromatik graceful ganjil dari graf hasil operasi *comb* graf tangga, yang dapat memberikan kontribusi penting dalam pengembangan teori graf.

Graf tangga L_n merupakan graf sederhana tak berarah yang memiliki $2n$ simpul dan $3n - 2$ sisi. Graf ini dibentuk melalui hasil kali Kartesius antara graf lintasan P_n dan graf lintasan P_2, yang dapat dituliskan sebagai $L_n = P_n \times P_2$ (Royani dkk., 2017). Graf lintasan P_m adalah graf dengan orde

m dan ukuran $m - 1$ (Chartrand dkk., 2010). Operasi *comb* graf tangga dengan graf lintasan dinotasikan dengan $L_n \rhd P_m$, operasi *comb* graf tangga dengan graf lingkaran dinotasikan dengan $L_n \rhd C_m$, dan operasi *comb* graf tangga dengan graf bintang dinotasikan dengan $L_n \rhd S_m$. Pemilihan graf $L_n \rhd P_m$, $L_n \rhd C_m$, dan $L_n \rhd S_m$ didasarkan oleh upaya untuk memperluas kajian tentang pewarnaan graceful ganjil ke arah yang lebih umum, melalui penelusuran bilangan kromatik graceful ganjil pada graf-graf tersebut yang hingga kini belum pernah diteliti ataupun ditemukan sebelumnya. Berdasarkan uraian tersebut, maka penelitian ini dilakukan untuk menentukan Bilangan Kromatik Graceful Ganjil pada Graf Hasil Operasi *Comb* Graf Tangga.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah disampaikan, permasalahan dalam penelitian ini adalah berapa bilangan kromatik graceful ganjil yang diperoleh dari graf hasil operasi *comb* graf tangga, yaitu $L_n \rhd P_m$, $L_n \rhd C_m$, dan $L_n \rhd S_m$.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun yang menjadi tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bilangan kromatik graceful ganjil yang didapatkan pada graf hasil operasi *comb* graf tangga, yaitu $L_n \rhd P_m$, $L_n \rhd C_m$, dan $L_n \rhd S_m$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat didapatkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagi Peneliti

   Penelitian ini memberikan wawasan dan pemahaman yang lebih mendalam terkait bilangan kromatik graceful ganjil, khususnya pada graf yang dihasilkan melalui operasi *comb* pada graf tangga. Selain itu, penelitian ini juga berkontribusi dalam meningkatkan kemampuan peneliti dalam melaksanakan riset secara sistematis.

2. Bagi Pembaca

   Temuan dari penelitian ini dapat menjadi acuan maupun panduan awal bagi pembaca yang tertarik untuk melakukan studi lanjutan dalam bidang kromatik graceful ganjil atau topik pewarnaan graf lainnya.