BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf dapat didefinisikan sebagai sebuah pasangan himpunan (V, E) dimana V merupakan himpunan berhingga yang tidak kosong dari simpul (*vertex*), dan E merupakan himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut simpul u dan v atau uv yang adalah anggota dari V yang disebut dengan sisi (*edge*). Pada graf G Himpunan V disebut himpunan-simpul dari G dan himpunan E disebut sebagai himpunan sisi dari G.

Banyaknya simpul pada sebuah graf G dapat disebut dengan ordo (*order*) G. Sedangkan banyaknya sisi pada graf G dapat disebut ukuran (*size*) G. Misalkan u dan v merupakan simpul-simpul dari graf G, u dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan v bila terdapat sebuah sisi e yang menghubungkan u dan v, yaitu $e = uv$. Simpul v disebut tetangga dari simpul u. Himpunan semua tetangga dari simpul u disebut ketetanggaan dari u dan dinotasikan dengan $N(u)$. Kedua simpul u dan v dapat juga disebut bersisian (*incident*) dengan sisi e.

Pelabelan pada suatu graf merupakan sebuah fungsi yang memetakan setiap elemen graf yaitu sisi (*edge*) ataupun simpul (*vertex*) ke bilangan-bilangan bulat positif, yang disebut label (Chang, 2000). Jika sebuah pelabelan hanya menggunakan domain yang berupa himpunan simpul maka dapat diartikan sebagai pelabelan simpul, dan apabila domainnya berupa himpunan sisi maka dapat diartikan sebagai pelabelan sisi. Jika domainnya berupa himpunan simpul dan sisi maka disebut sebagai pelabelan total (*total labeling*). Hingga saat ini telah terdapat banyak jenis pelabelan diantaranya *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib serta pelabelan tidak teratur. Penelitian yang berkaitan dengan teori graf terlebih khusus pelabelan graf terus mengalami perkembangan. Survei terkini berkaitan dengan pelabelan graf yang telah dilakukan terdapat pada tulisan "*A Dynamic Survey of Graph Labeling*" oleh Gallian (2022).

Chartrand *et al.* (1988) memperkenalkan pelabelan-k tidak teratur pada graf dan konsep kekuatan ketidakteraturan pada graf. Pada suatu graf terhubung sederhana G dapat didefinisikan pelabelan sisi sehingga bobot setiap simpulnya berbeda, maka pelabelan sisi tersebut disebut dengan pelabelan tidak teratur. Pelabelan tidak teratur pada graph G tanpa simpul terisolasi juga dapat didefinisikan sebagai sebuah pemetaan bilangan bulat positif ke sisi-sisi di G sedemikian sehingga bobot setiap simpul berbeda (bobot simpul dapat diperoleh dari penjumlahan sisi-sisi terkait dengan simpul tersebut) (Gallian, 2020). Pelabelan tidak teratur pada graph terdiri dari pelabelan tidak teratur sisi (Ahmad, Al-Mushayt and Bača, 2014), pelabelan tidak teratur simpul (Chartrand et al., 1998), serta pelabelan tidak teratur total (Bača et al., 2007).

Beberapa tahun terakhir telah banyak dilakukan penelitian kekuatan ketidakteraturan. Beberapa hasil dari penelitian tersebut yang telah dirumuskan adalah: Graf Lintasan dengan P_n dengan $n \geq 2$ memiliki ketidakteraturan sisi $s(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, Graf Bintang $K_{1,n}$dengan $n \geq 1$, memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi n dinotasikan dengan $s(K_{1,n}) = n$, Graf Bintang Ganda $S_{k,k}$, untuk $3 \leq i \leq k$, memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi $s(S_{k,k}) = 2k$ untuk setiap nilai k ganjil.

Misalkan $G = (V, E)$ merupakan sebuah graf berorder n dengan tidak memuat komponen berorder dua. Sebuah pelabelan-k sisi $f: E(G) \to \{1, 2, \dots k\}$ adalah pelabelan-k tidak teratur modular pada G bila terdapat fungsi bijektif $w: V(G) \to Z_n$, yang mana Z_n merupakan grup penjumlahan dari bilangan bulat modulo n dan bobot modular dari simpul x dapat didefinisikan oleh

$$w(x) = \sum_{xy \in E} f(xy)(mod\, n)$$

untuk semua simpul y yang bertetangga dengan simpul x. Nilai kekuatan ketidakteraturan modular dari G dapat dinotasikan dengan $ms(G)$ yang merupakan bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan-k tidak teratur modular. Jika tidak terdapat nilai k sehingga terpenuhi pelabelan-k tidak teratur modularnya maka didefinisikan $ms(G) = \infty$.

Baca et al. (2020) membuktikan bahwa kekuatan ketidakteraturan modular pada sebuah graf lebih dari atau sama dengan kekuatan ketidakteraturannya. Graf lintasan memiliki kekuatan ketidakteraturan modular yang sama dengan kekuatan ketidakteraturannya, kecuali untuk graf lintasan yang memiliki order ekuivalen dengan $2(mod 4)$. Baca et al., (2020) membuktikan bahwa terdapat pelabelan tidak teratur sisi pada C_n (kecuali ordernya ekuivalen dengan $2(mod 4)$ yang menghasilkan bobot simpul berupa barisan bilangan asli berurutan. Oleh karena itu, kekuatan ketidakteraturan modular C_n (kecuali ordernya ekuivalen dengan $2(mod 4)$ sama dengan kekuatan ketidakteraturannya. Namun, pada graf Bintang $K_{1,n}$ dengan n ekuivalen dengan $3(mod\ 4)$, $ms(K_{1,n}) = n + 1$, sedangkan $s(K_{1,n}) = n$. Terdapat banyak kelompok graf yang kekuatan ketidakteraturan modularnya belum diketahui. Menurut Baca et al., (2020) masalah terbuka yang dapat dikaji lebih lanjut adalah bagaimana kharateristik graf G sehingga $ms(G)$ lebih dari $s(G)$.

Penelitian ini difokuskan untuk mencari kekuatan ketidakteratuan modular pada graf rantai khususnya pada graf rantai $C\left[S_n^{(3)}\right]$". Graf rantai adalah graf dengan blok-blok $B_1, B_2, \dots, B_n$ sehingga untuk setiap i, B_i dan B_{i+1} memiliki sebuah simpul sekutu, sedemikian hingga graf yang dibentuk dari simpul-simpul ini merupakan lintasan. Graf rantai dengan n buah blok $B_1, B_2, \dots, B_n$ dinotasikan dengan $C[B_1, B_2, \dots, B_n]$. Jika $B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$, $C[B_1, B_2, \dots, B_n]$ dapat ditulis dengan $C\left[B^{(n)}\right]$. Terdapat beberapa penelitian terkait kekuatan ketidakteraturan sisi pada graf rantai. Diantaranya adalah tentang kekuatan ketidakteraturan sisi graf rantai $C\left[C_n^{(m)}\right]$ untuk $n = 5, 7$ oleh (Narita et al., 2021). Penulis tertarik untuk mengkaji kekuatan ketidakteraturan modular dari graf rantai untuk menambah khasanah pengetahuan di bidang pelabelan graf.

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, penulis merumuskan penelitian dengan judul "Analisis Kekuatan Ketidakteraturan Modular dari Graf Rantai $C\left[S_n^{(3)}\right]$".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang diatas, adapun rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah bagaimana kekuatan ketidakteraturan modular dari graf Rantai $C\left[S_n^{(3)}\right]$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan pada latar belakang dan mengacu pada rumusan masalah yang diajukan, penelitian ini memiliki tujuan mengkaji bagaimana kekuatan ketidakteraturan modular dari graf Rantai $C\left[S_n^{(3)}\right]$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi ilmu pengetahuan khusunya pada bidang matematika baik secara teoritis maupun praktis. Adapun manfaat secara teoritis dan praktis tersebut sebagai berikut.

1. Manfaat Teoritis

   Adapun manfaat teoritis yang diharapkan penulis dalam melakukan penelitian ini adalah menambah wawasan dan pengetahuan serta memberikan sumbangsih pemikiran pada bidang matematika khususnya pada teori graf tentang kekuatan ketidakteraturan modular dari graf Rantai $C\left[S_n^{(3)}\right]$.

2. Manfaat Praktis

   a. Bagi Peneliti

      Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan terkait pelabelan graf, menemukan kekuatan ketidakteraturan modular dari graf Rantai $C\left[S_n^{(3)}\right]$, mendapatkan pengalaman dalam melaksanakan penelitian dan menyusun karya ilmiah, serta dapat mengaplikasikan ilmu matematika yang sudah dipelajari.

   b. Bagi Pembaca

Menambah wawasan dan menjadi referensi pembaca mengenai pelabelan graf khususnya mengenai kekuatan ketidakteraturan modular dari graf rantai $C\left[S_n^{(3)}\right]$ sehingga dapat dijadikan acuan dalam melaksanakan penelitian selanjutnya.