

**PELABELAN *GRACEFUL* PADA GRAF KIPAS  
DIPERLUAS: GRAF  $P_k F_n$ , GRAF  $MF_{k,n}$ , dan GRAF  
 $SF(k, n)$ , SERTA KARAKTERISASINYA  
BERDASARKAN PAPAN CATUR SEDERHANA,  
BARISAN PELABELAN, DAN RELASI PELABELAN**



**PROGRAM STUDI S1 PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS PENDIDIKAN GANESHA  
SINGARAJA  
2025**



**PELABELAN *GRACEFUL* PADA GRAF KIPAS  
DIPERLUAS: GRAF  $P_k F_n$ , GRAF  $MF_{k,n}$ , dan GRAF  
 $SF(k, n)$ , SERTA KARAKTERISASINYA  
BERDASARKAN PAPAN CATUR SEDERHANA,  
BARISAN PELABELAN, DAN RELASI PELABELAN**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada**

**Universitas Pendidikan Ganesha**

**Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam Menyelesaikan**

**Program Sarjana Pendidikan Matematika**

**Oleh**

**Ni Ketut Fatma Juniawati**

**NIM 1813011039**

**PROGRAM STUDI S1 PENDIDIKAN MATEMATIKA**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS PENDIDIKAN GANESHA**

**SINGARAJA**

**2025**

# **SKRIPSI**

**DIAJUKAN UNTUK MELENGKAPI TUGAS  
DAN MEMENUHI SYARAT-SYARAT UNTUK  
MENCAPAI GELAR SARJANA PENDIDIKAN**

**Menyetujui**

Pembimbing I,



Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si.  
NIP. 19650711 199003 1 003

Pembimbing II,



Dr. Gede Suweken, M.Sc.  
NIP. 19611111 198702 1 001

Skripsi oleh Ni Ketut Fatma Juniawati ini  
telah dipertahankan di depan dewan penguji  
pada tanggal 21 Mei 2025 .

Dewan Penguji,



Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si.  
NIP 19650711 199003 1 003

(Ketua)



Dr. Gede Suweken, M.Sc.  
NIP 19611111 198702 1 001

(Anggota)



Dr. I Nyoman Sukajaya, M.T.  
NIP 19671115 199303 1 001

(Anggota)



I Nyoman Budayana, S.Pd., M.Sc.  
NIP 19901024 202012 1 005

(Anggota)

Diterima oleh Panitia Ujian Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Pendidikan Ganesha  
guna memenuhi syarat-syarat untuk mencapai gelar sarjana pendidikan

Pada:

Hari : Kamis  
Tanggal : 31 Juli 2025

Mengetahui,

Ketua Ujian,

Sekretaris Ujian,



Dr. I Wayan Puja Astawa, S.Pd., M.Stat.Sci.  
NIP. 19690116 199403 1 001



Dr. I Putu Pasek Suryawan, S.Pd., M.Pd.  
NIP. 19880617 201404 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. I Wayan Sukra Warpala, S.Pd., M.Sc.  
NIP. 19671013 199403 1 001



## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa karya tulis yang berjudul “Pelabelan *Graceful* pada Graf Kipas Diperluas: Graf  $P_k F_n$ , Graf  $MF_{k,n}$ , dan Graf  $SF(k,n)$ , serta Karakterisasinya Berdasarkan Papan Catur Sederhana, Barisan Pelabelan, dan Relasi Pelabelan” beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan dan mengutip dengan cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung resiko/sanksi yang dijatuhkan kepada saya apabila kemudian ditemukan adanya pelanggaran atas etika keilmuan dalam karya saya ini, atau ada klaim terhadap keaslian karya saya ini.

Singaraja, 21 Mei 2025

Yang membuat pernyataan,



Ni Ketut Fatma Juniawati

NIM 1813011039

## PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan Rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul **“Pelabelan *Graceful* pada Graf Kipas Diperluas: Graf  $P_k F_n$ , Graf  $MF_{k,n}$ , dan Graf  $SF(k,n)$ , serta Karakterisasinya Berdasarkan Papan Catur Sederhana, Barisan Pelabelan, dan Relasi Pelabelan”** guna memenuhi persyaratan dalam meraih gelar sarjana pendidikan di Universitas Pendidikan Ganesha.

Dalam perjalanan menyelesaikan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak sehingga penulis dapat mengatasi segala hambatan dan menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Oleh karena itu, dengan rasa hormat dan kerendahan hati penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si. selaku Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, kritik, saran, dan motivasi yang sangat berarti bagi penulis selama menyusun skripsi ini.
2. Bapak Dr. Gede Suweken, M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang sangat berarti bagi penulis selama menyusun skripsi ini.
3. Bapak Dr. I Nyoman Sukajaya, M.T. selaku Dewan Penguji yang telah memberikan kritik dan saran guna menyempurnakan isi dari skripsi ini.
4. Bapak I Nyoman Budayana, S.Pd., M.Si. selaku Dewan Penguji yang telah memberikan kritik dan saran guna menyempurnakan isi dari skripsi ini.
5. Bapak/Ibu Dosen dan Pegawai di lingkungan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberikan arahan dengan sangat jelas dan fasilitas yang sangat baik dalam proses penyelesaian skripsi ini.
6. Orang tua, kakak, dan adik yang sangat penulis cintai yang telah memberikan doa restu, motivasi, suka dan duka selama menempuh perkuliahan hingga selesai.



7. Pihak lain yang tidak bisa disebutkan satu-persatu yang telah memberikan hiburan, semangat dan motivasi sehingga penulis masih bisa berbahagia hingga saat ini.

Penulis sangat menyadari bahwa apa yang disajikan dalam skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan segala kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan skripsi ini serta penulis berharap skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca khususnya bagi perkembangan ilmu pengetahuan yang akan datang.

Singaraja, 21 Mei 2025

Penulis



## DAFTAR SIMBOL

|                     |                                                                                                                                                             |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $G(V, E)$           | : Graf dengan $V$ merupakan himpunan titik dan $E$ merupakan himpunan sisi                                                                                  |
| $V$                 | : Himpunan titik pada graf                                                                                                                                  |
| $E$                 | : Himpunan sisi pada graf                                                                                                                                   |
| $ V(G) $            | : Banyak anggota himpunan titik pada graf $G$                                                                                                               |
| $ E(G) $            | : Banyak anggota himpunan sisi pada graf $G$                                                                                                                |
| $j_i$               | : Barisan bilangan bulat non-negatif                                                                                                                        |
| $L$                 | : Barisan pelabelan                                                                                                                                         |
| $A(L)$              | : Relasi pelabelan                                                                                                                                          |
| $P_k F_n$           | : Graf kipas yang diperluas dengan menambahkan graf lintasan $P_k$ dengan panjang yang sama pada jalur utama $P_n$ dari graf kipas $F_n$                    |
| $MF_{k,n}$          | : Graf kipas diperluas yang terdiri dari $k$ graf kipas $F_n$ yang memiliki lintasan yang sama (saling menyatu)                                             |
| $SF(k, n)$          | : Graf yang diperoleh dengan menyatukan simpul pusat dari graf bintang $S_k$ untuk $k \geq 3$ dengan simpul akhir graf lintasan $P_n$ dari graf kipas $F_n$ |
| $m$                 | : banyaknya sisi pada graf                                                                                                                                  |
| $\lceil x \rceil$   | : fungsi <i>ceiling</i> $x$ (bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan $x$ )                                                                |
| $\lfloor x \rfloor$ | : fungsi <i>floor</i> $x$ (bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $x$ )                                                                  |

## DAFTAR ISI

|                                                                                                                                                 |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| PRAKATA.....                                                                                                                                    | i      |
| ABSTRAK .....                                                                                                                                   | iii    |
| DAFTAR SIMBOL.....                                                                                                                              | v      |
| DAFTAR ISI.....                                                                                                                                 | vi     |
| DAFTAR TABEL .....                                                                                                                              | viii   |
| DAFTAR GAMBAR .....                                                                                                                             | ix     |
| DAFTAR LAMPIRAN.....                                                                                                                            | xi     |
| <br>BAB I PENDAHULUAN.....                                                                                                                      | <br>1  |
| 1.1 Latar Belakang .....                                                                                                                        | 1      |
| 1.2 Rumusan Masalah .....                                                                                                                       | 4      |
| 1.3 Tujuan Penulisan .....                                                                                                                      | 4      |
| 1.4 Manfaat Penulisan .....                                                                                                                     | 5      |
| <br>BAB II KAJIAN PUSTAKA.....                                                                                                                  | <br>6  |
| 2.1 Definisi dan Terminologi Graf .....                                                                                                         | 6      |
| 2.2 Jenis-Jenis Graf .....                                                                                                                      | 7      |
| 2.3 Graf Kipas Diperluas $P_kF_n$ , Graf Kipas Diperluas $MF_{k,n}$ ( <i>multiple fan graph</i> ),<br>dan Graf Kipas Diperluas $SF(k, n)$ ..... | 10     |
| 2.4 Pelabelan <i>Graceful</i> .....                                                                                                             | 14     |
| 2.5 Graf Papan Catur ( <i>Chessboard Graph</i> ).....                                                                                           | 15     |
| 2.6 Barisan Pelabelan .....                                                                                                                     | 20     |
| 2.7 Relasi Pelabelan .....                                                                                                                      | 21     |
| 2.8 Penelitian yang Relevan .....                                                                                                               | 23     |
| <br>BAB III METODE PENELITIAN.....                                                                                                              | <br>27 |
| 3.1 Metode Penelitian.....                                                                                                                      | 27     |
| <br>BAB IV PEMBAHASAN.....                                                                                                                      | <br>29 |
| 4.1 Pelabelan <i>Graceful</i> pada Graf Kipas Diperluas $P_kF_n$ untuk $k > 3$ dan<br>Karakterisasinya.....                                     | 29     |

|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.2 Pelabelan <i>Graceful</i> pada Graf Kipas Diperluas $MF_{k,n}$ ( <i>multiple fan graph</i> ) | 64 |
| 4.3 Pelabelan <i>Graceful</i> pada Graf Kipas Diperluas $SF(k, n)$                               | 72 |
| BAB V PENUTUP                                                                                    | 79 |
| 5.1 Kesimpulan                                                                                   | 79 |
| 5.2 Saran                                                                                        | 84 |
| DAFTAR PUSTAKA                                                                                   |    |



## DAFTAR TABEL

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| Tabel 2.1 Tabel Pelabelan .....                                   | 21 |
| Tabel 2.2 Tabel Pelabelan Graf Kipas Diperkaya $4F_6$ .....       | 24 |
| Tabel 4.1 Tabel Pelabelan Graf Kipas Diperluas $P_5F_5$ .....     | 32 |
| Tabel 4.2 Pengelompokkan ji Graf Kipas Diperluas $P_5F_5$ .....   | 32 |
| Tabel 4.3 Tabel Pelabelan Graf Kipas Diperluas $P_7F_4$ .....     | 42 |
| Tabel 4.4 Pengelompokkan ji Graf Kipas Diperluas $P_7F_4$ .....   | 42 |
| Tabel 4.5 Tabel Pelabelan Graf Kipas Diperluas $P_6F_4$ .....     | 54 |
| Tabel 4.6 Pengelompokkan ji Graf Kipas Diperluas $P_6F_4$ .....   | 55 |
| Tabel 4.7 Tabel Pelabelan Graf Kipas Diperluas $MF_{4,5}$ .....   | 66 |
| Tabel 4.8 Pengelompokkan ji Graf Kipas Diperluas $MF_{4,5}$ ..... | 66 |
| Tabel 4.9 Tabel Pelabelan Graf Kipas Diperluas $SF(4,4)$ .....    | 73 |
| Tabel 4.10 Pengelompokkan ji Graf Kipas Diperluas $SF(4,4)$ ..... | 74 |





## DAFTAR GAMBAR

|                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Gambar 1.1 Ilustrasi Jembatan Konigsberg .....                                                                    | 1  |
| Gambar 2.1 Gambar $G_1$ .....                                                                                     | 6  |
| Gambar 2.2 Gambar $G_2$ .....                                                                                     | 7  |
| Gambar 2.3 Contoh Graf Sederhana .....                                                                            | 8  |
| Gambar 2.4 Contoh Graf Tak Sederhana .....                                                                        | 8  |
| Gambar 2.5 Contoh Graf Berarah .....                                                                              | 9  |
| Gambar 2.6 Contoh Graf Terhubung dan Tidak Terhubung.....                                                         | 9  |
| Gambar 2.7 Graf Lintasan $P_5$ .....                                                                              | 10 |
| Gambar 2.8 Contoh Graf Lingkaran $C_5$ .....                                                                      | 10 |
| Gambar 2.9 Titik $v_0$ .....                                                                                      | 11 |
| Gambar 2.10 Graf Lintasan $P_n$ .....                                                                             | 11 |
| Gambar 2.11 Graf Kipas $F_n$ .....                                                                                | 11 |
| Gambar 2.12 Graf Kipas Diperkaya $2F_n$ (kiri) dan Graf Kipas Diperkaya $3F_n$ (kanan).....                       | 12 |
| Gambar 2.13 Graf Kipas Diperluas $P_4F_3$ .....                                                                   | 12 |
| Gambar 2.14 Graf Kipas Diperluas $MF_{4,5}$ .....                                                                 | 13 |
| Gambar 2.15 Graf Kipas Diperluas $SF(3,4)$ .....                                                                  | 13 |
| Gambar 2.16 Contoh Graf <i>Graceful</i> dan Graf Papan Catur yang Sesuai .....                                    | 15 |
| Gambar 2.17 Graf Berlabel- $\sigma$ dengan <i>Double Chessboard</i> .....                                         | 17 |
| Gambar 2.18 Graf Berlabel- $\rho$ dengan <i>Dual Chessboard</i> .....                                             | 18 |
| Gambar 2.19 Graf Berlabel- $\gamma$ dengan <i>M-chessboard</i> .....                                              | 19 |
| Gambar 2.20 Graf Berlabel- $p$ dengan <i>Twin Chessboard</i> .....                                                | 19 |
| Gambar 2.21 Contoh Graf <i>Graceful</i> beserta Representasi dalam Papan Catur Sederhana dan Tabel Pelabelan..... | 22 |
| Gambar 2.22 Graf Kipas Diperkaya $4F_6$ .....                                                                     | 23 |
| Gambar 2.23 Representasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperkaya $4F_6$ ...                                    | 24 |
| Gambar 4.1 Bentuk Umum Graf Kipas Diperluas $P_kF_n$ untuk $k > 3$ dan $n$ ganjil $\geq 3$ .....                  | 30 |
| Gambar 4.2 Graf Kipas Diperluas $P_5F_5$ .....                                                                    | 31 |
| Gambar 4.3 Representasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $P_5F_5$ ....                                  | 31 |



|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Gambar 4.4 Klasifikasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $P_k F_n$ untuk $k > 3$ dan $n$ ganjil $\geq 3$ ..... | 35 |
| Gambar 4.5 Bentuk Umum Graf $P_k F_n$ untuk $k$ ganjil $> 3$ dan $n$ genap .....                                        | 40 |
| Gambar 4.6 Graf Kipas Diperluas $P_7 F_4$ .....                                                                         | 41 |
| Gambar 4.7 Representasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $P_7 F_4$ ....                                       | 41 |
| Gambar 4.8 Klasifikasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $P_k F_n$ untuk $k$ ganjil $> 3$ dan $n$ genap.....   | 46 |
| Gambar 4.9 Bentuk Umum Graf $P_k F_n$ untuk $k$ genap $> 3$ dan $n$ genap .....                                         | 53 |
| Gambar 4.10 Graf Kipas Diperluas $P_6 F_4$ .....                                                                        | 53 |
| Gambar 4.11 Representasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $P_6 F_4$ ..                                        | 54 |
| Gambar 4.12 Klasifikasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $P_k F_n$ untuk $k$ genap $> 3$ dan $n$ genap.....   | 58 |
| Gambar 4.13 Bentuk Umum Graf Kipas Diperluas $MF_{k,n}$ .....                                                           | 64 |
| Gambar 4.14 Graf Kipas Diperluas $MF_{4,5}$ .....                                                                       | 65 |
| Gambar 4.15 Representasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $MF_{4,5}$ ..                                       | 65 |
| Gambar 4.16 Klasifikasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $MF_{k,n}$ ...                                       | 68 |
| Gambar 4.17 Bentuk Umum Graf Kipas Diperluas $SF(k, n)$ .....                                                           | 72 |
| Gambar 4.18 Graf Kipas Diperluas $SF(4,4)$ .....                                                                        | 72 |
| Gambar 4.19 Representasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $SF(4,4)$ .....                                     | 73 |
| Gambar 4.20 Klasifikasi Papan Catur Sederhana Graf Kipas Diperluas $SF(k, n)$                                           | 75 |

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Riwayat Hidup

