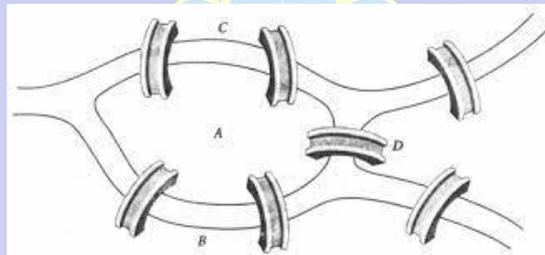


BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang memiliki banyak kegunaan. Salah satu kegunaannya yaitu untuk merepresentasikan suatu masalah dengan sederhana melalui objek-objek diskrit dan hubungan antar objek-objek sehingga memudahkan dalam penyelesaiannya. Objek-objek yang dimaksud adalah titik (*vertex*) dan sisi (*edge*).



Gambar 1.1 Ilustrasi Jembatan Königsberg

Teori graf bermula dari masalah jembatan Königsberg pada tahun 1736. Di Kota Königsberg (sekarang bernama kota Kaliningrad), mengalir sungai Pregal yang mengitari pulau Kneiphof yang bercabang menjadi 2 anak sungai. Terdapat 7 buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Warga Königsberg ingin melewati 7 jembatan Königsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke titik awal. Euler pun membuktikan bahwa hal tersebut tidak mungkin terjadi. Dalam membuktikannya, ia memodelkan masalah tersebut kedalam graf dengan menyatakan daratan (titik yang dihubungkan oleh jembatan) sebagai titik (*vertex*) dan jembatan sebagai sisi (*edge*) (Daniel & Taneo, 2019).

Salah satu topik yang menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan sembarang fungsi yang memasangkan titik atau sisi pada graf dengan bilangan sesuai aturan tertentu tergantung jenis pelabelan yang digunakan. Pelabelan terdiri dari tiga jenis yaitu pelabelan titik (titik sebagai domain), pelabelan sisi (sisi sebagai domain), dan pelabelan total (titik dan sisi sebagai domain).

Penelitian mengenai pelabelan graf sangat berkembang pesat dilihat dari banyaknya hasil penelitian yang telah diketahui dan masih terus diteliti hingga saat ini. Salah satu jenis pelabelan pada teori graf yaitu β -labellings yang diperkenalkan oleh Rosa (1967) yang kemudian oleh S.W. Golomb menamainya dengan pelabelan *graceful*. Pelabelan *graceful* pada graf $G(V, E)$ merupakan fungsi injektif f dari himpunan titik $V(G)$ yang dipetakan ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ dengan $u, v \in V(G)$ berlaku $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$. Graf $G(V, E)$ dapat dikatakan graf *graceful* apabila dapat dilabeli dengan pelabelan *graceful* (Ilyas et al., 2021).

Dalam tulisan "*Vertex Labellings of Simple Graphs*" karya M. Haviar dan M. Ivaska (2015) menyatakan bahwa pelabelan *graceful* dapat direpresentasikan dengan 3 alat yaitu graf papan catur, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan. Sesungguhnya graf papan catur mulai diperkenalkan M. Ivaska (1990), kemudian dikembangkanlah jenis-jenis dari graf papan catur oleh M. Haviar & M. Ivaska. Relasi pelabelan juga merupakan alat baru yang diperkenalkan oleh M. Haviar dan

M. Ivaska dalam tulisannya tersebut sedangkan barisan pelabelan diperkenalkan oleh Sheppard pada tahun 1976 (Haviar & Ivaska, 2015).

Penelitian mengenai graf *graceful* berkembang dengan pesat seiring berjalannya waktu. Telah muncul beberapa teorema-teorema terbaru mengenai karakterisasi graf *graceful* berdasarkan graf papan catur, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan. Beberapa hasil penelitian telah dipublikasikan mengenai graf *graceful* dan karakterisasinya berdasarkan graf papan catur, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan pada beberapa jenis graf. Salah satunya yaitu publikasi oleh M. Haviar dan S. Kurtulik (2021) yang dalam artikelnya telah membuktikan bahwa graf kipas diperkaya kF_n (*k-enriched fan graph*) merupakan graf *graceful* dan menjabarkan karakterisasinya berdasarkan papan catur sederhana, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan. Dalam artikel oleh M. Haviar dan S. Kurtulik (2021) juga menyatakan sebuah *open problem* untuk membuktikan apakah graf kipas diperluas P_kF_n merupakan graf *graceful* dan bagaimana karakterisasinya berdasarkan papan catur sederhana, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan. Oleh karena *open problem* tersebut belum terjawab hingga saat ini, penulis berencana untuk menjawab *open problem* tersebut serta menambahkan jenis graf kipas diperluas lainnya yaitu graf kipas diperluas $MF_{k,n}$ (*multiple fan graph*) dan graf kipas diperluas $SF(k, n)$. Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, penulis merumuskan judul penelitian yaitu “**Pelabelan *Graceful* pada Graf Kipas Diperluas: Graf P_kF_n , Graf $MF_{k,n}$, dan Graf $SF(k, n)$, serta Karakterisasinya Berdasarkan Papan Catur Sederhana, Barisan Pelabelan, dan Relasi Pelabelan**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Apakah graf kipas diperluas $P_k F_n$, graf kipas diperluas $MF_{k,n}$ (*multiple fan graph*), dan graf kipas diperluas $SF(k, n)$ merupakan graf *graceful*?
2. Bagaimana karakterisasi dari graf kipas diperluas $P_k F_n$, graf kipas diperluas $MF_{k,n}$, dan graf kipas diperluas $SF(k, n)$ berdasarkan papan catur sederhana, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan?

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dilaksanakannya penelitian ini yaitu:

1. untuk menunjukkan bahwa graf kipas diperluas $P_k F_n$, graf kipas diperluas $MF_{k,n}$ (*multiple fan graph*), dan graf kipas diperluas $SF(k, n)$ merupakan graf *graceful*; dan
2. untuk mendeskripsikan karakterisasi dari graf kipas diperluas $P_k F_n$, graf kipas diperluas $MF_{k,n}$ (*multiple fan graph*), dan graf kipas diperluas $SF(k, n)$ berdasarkan papan catur sederhana, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan.

1.4 Manfaat Penulisan

1.4.1 Manfaat Teoritis

Peneliti berharap dengan dilaksanakannya penelitian ini dapat memberikan sumbangan pemikiran berupa terjawabnya *open problem* yang terdapat pada tulisan oleh M. Haviar dan S. Kurtulik (2021) dengan judul “A New Class of Graceful Graphs: k -enriched Fan Graphs and Their Characterisations” yang dipublikasikan pada *CUBO, A Mathematical Journal*.

1.4.2 Manfaat Praktis

a. Bagi Penulis

Melakukan penelitian ini memberikan manfaat berupa pengalaman dan pengetahuan baru kepada penulis mengenai perkembangan tentang penelitian dari pelabelan *graceful* berupa karakterisasi dari suatu graf *graceful* melalui papan catur sederhana, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan.

b. Bagi Pembaca

Adanya publikasi penelitian ini dapat dijadikan sumber bagi pembaca dalam melakukan penelitian mengenai pelabelan *graceful* dan karakterisasi dari suatu graf melalui papan catur sederhana, barisan pelabelan, dan relasi pelabelan dengan objek penelitian berupa jenis graf *graceful* lainnya.