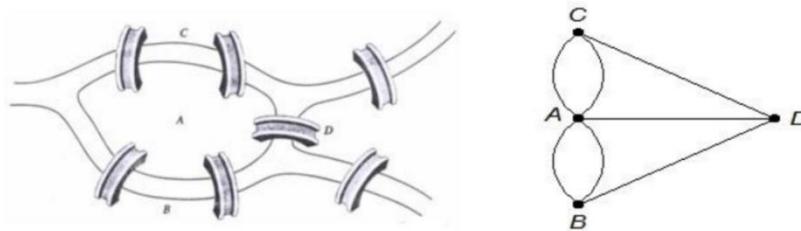


# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Tahun 1735, di kawasan Kaliningrad, Rusia yang saat itu merupakan bagian dari Prusia Timur, muncul sebuah masalah yang cukup terkenal mengenai jembatan di kota Königsberg, dimana masyarakat ingin mengetahui apakah mungkin untuk melintasi setiap jalan di jembatan tersebut satu kali jalan dengan setiap jembatan hanya dilewati satu kali dan kembali ke titik awal, pada akhirnya tidak ada satupun yang dapat memecahkan masalah ini. Sampai seorang matematikawan yang berasal dari Swiss bernama Leonhard Euler menemukan teori untuk permasalahan tersebut. Euler menuangkannya kedalam makalah yang berjudul “*Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis (The solution to a problem relating to the geometry of position)*” (Venkataraman, 2024). Daratan disekeliling diibaratkan sebagai titik (simpul) dan jembatan yang menghubungkan masing masing daratan tersebut sebagai garis (sisi). Euler menunjukkan dalam penelitiannya untuk dapat melewati jembatan dalam sekali putaran setiap titiknya harus memiliki derajat genap, namun pada jembatan Königsberg tidak dapat dilewati dalam sekali jalan dengan setiap jembatannya dilewati satu kali karena ada 4 titik yang memiliki derajat ganjil. Penelitian Euler memang tidak memecahkan masalah jembatan Königsberg tetapi penelitiannya dapat menjadi fondasi kuat untuk perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya dibidang Teori Graf (Alexanderson, 2006).



Gambar 1. 1 Representasi Jembatan Königsberg ke dalam Graf

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu di bidang matematika yang fokus pada mengkaji hubungan antara objek-objek diskrit yang dikenal dengan simpul (titik atau *vertex*), dimana hubungan antara titik-titik tersebut direpresentasikan sebagai sisi (*edge*). Suatu graf terdiri dari himpunan yang masing-masingnya disebut sebagai himpunan titik (*vertex*) dan himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik tersebut disebut himpunan sisi atau *edge*. Pasangan himpunan tersebut ( $V(G), E(G)$ ) mendefinisikan suatu graf, dimana  $V(G)$  merupakan himpunan titik (*vertex*) dan  $E(G)$  disebut sebagai himpunan sisi (*edge*) (Amri et al., 2019). Berbagai jenis objek dapat direpresentasikan ke model matematika untuk dimodelkan dan dianalisis melalui suatu graf, dimana model tersebut akan membantu pemecahan suatu masalah yang terjadi di banyak situasi pada dunia nyata, berbagai bidang seperti ilmu komputer, kimia, sosiologi, dan lain lain dapat menggunakan penerapan aplikasi dari teori graf (Juliandatu Masido, 2006). Pendalaman teori graf memiliki banyak sekali topik menarik yang bisa diteliti dan diperdalam, salah satunya adalah pewarnaan graf yang merupakan proses pemberian warna pada titik-titik pada graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik atau sisi yang bertetangga atau memiliki warna yang sama. Dalam teori graf

pewarnaan graf memiliki beberapa jenis, diantaranya pewarnaan harmonis, pewarnaan total, pewarnaan pelangi, pewarnaan *magic* dan pewarnaan *graceful*.

Pewarnaan *graceful* merupakan salah satu topik dari pendalaman sebuah peabelan graf yang sangat menarik perhatian banyak peneliti. Dalam pewarnaan *graceful* kita juga mengangkat konsep pelabelan *graceful* yang dimana setiap titik dari sebuah graf yang akan diwarnai tersebut diberi label dengan bilangan bulat positif  $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|\}$  yang berbeda – beda, dan label pada setiap sisi didefinisikan sebagai selisih dari label setiap titik yang terhubung dari sisi tersebut. Sebuah graf dikatakan *graceful* ketika semua label titik  $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  maupun sisi  $|f(u) - f(v)|, uv \in E$  yang bertetangga atau bertetangga tidak memiliki angka yang sama (Singh & Begum, 2023). Sebagai perluasan dari topik tersebut, diperkenalkan pewarnaan *graceful* ganjil (odd *graceful* coloring) dimana label sisi yang digunakan hanya bilangan bulat positif ganjil. Dalam pewarnaan *graceful* ganjil, bilangan terkecil  $k$  yang mempertahankan  $c$  sebagai pewarnaan *graceful* ganjil, disebut sebagai bilangan kromatik *graceful* ganjil untuk  $G$  dilambangkan sebagai  $\chi_{og}(G) = k$ . Namun, ketika sebaliknya, jika sebuah graf  $G$  tidak dapat diberi pewarnaan *graceful* dengan kondisi dimana titik ataupun sisinya tidak bisa memiliki warna yang berbeda, maka kita akan menyatakan bilangan kromatik yang didapat sebagai  $\chi_{og}(G) = \infty$  (Suparta et al., 2023).

Penelitian mengenai pewarnaan *graceful* ganjil terus berkembang karena sifatnya yang kompleks dan belum sepenuhnya terselesaikan, beberapa penelitian sebelumnya telah berhasil menemukan kondisi-kondisi tertentu yang menjamin keberadaan pewarnaan *graceful* ganjil pada beberapa kelas graf khusus seperti pewarnaan *graceful* ganjil pada beberapa graf seperti graf *cycle*, graf *path*, graf

pohon, graf hasil operasi kartesius antara 2 buah graf *path*, graf hasil operasi kartesius antara graf *path* dan *cycle*, serta masih banyak lainnya (Suparta et al., 2023). Namun, masih terdapat banyak jenis dan kelas graf yang belum diketahui apakah bisa dan memiliki sifat yang sesuai dengan pewarnaan *graceful* ganjil atau tidak. Hal ini memicu banyaknya *open problem* yang menarik dan penting untuk dikaji lebih dalam pada teori pewarnaan graf.

Salah satu penelitian yang potensial adalah pewarnaan *graceful* ganjil pada hasil operasi graf, seperti cartesian product dan comb antara graf *cycle* dan graf *star*. Hasil operasi ini menghasilkan struktur graf yang unik, kompleks, dan menantang untuk dianalisis. Penelitian ini akan berfokus pada pengkajian pewarnaan *graceful* ganjil terhadap hasil operasi cartesian product, dan comb antara graf *cycle* dan graf *star*, dengan harapan dapat menemukan bilangan kromatik dari masing-masing grafnya, serta mengidentifikasi kondisi-kondisi khusus yang memungkinkan pewarnaan tersebut. Selain memperkaya literatur dalam teori graf, hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi pijakan untuk pengembangan teorema baru serta memberikan inspirasi dalam eksplorasi penelitian terhadap jenis dan kelas graf yang lainnya.

## 1.2 Rumusan Masalah

Merujuk pada uraian latar belakang di atas, maka permasalahan yang menjadi fokus dalam penelitian ini, apakah hasil operasi pada graf *cycle* ( $C_n$ ) dan graf *star* ( $S_m$ ) dapat diberi pewarnaan *graceful* ganjil dan berapa bilangan kromatik dari setiap hasil operasi antara kedua buah graf tersebut.

### 1.3 Tujuan Penulisan

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan apakah graf hasil operasi pada graf *cycle* ( $C_n$ ) dan graf *star* ( $S_m$ ) dapat diberi pelabelan *graceful* ganjil dan mencari bilangan kromatik pada hasil operasi dari kedua graf tersebut.

### 1.4 Manfaat Penulisan

Melalui penelitian ini, penulis berharap karya akhir ini dapat memberikan kontribusi yang berarti bagi perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang matematika, baik dalam aspek teoritis maupun secara praktis, adapun manfaat yang diharapkan penulis.

#### 1.4.1 Manfaat Teoritis

Secara teoritis, penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan dan pengetahuan serta berkontribusi menuangkan ide pemikiran dalam bidang matematika, khususnya dalam teori graf, di mana dalam penelitian ini akan berfokus pada pembahasan mengenai pewarnaan *graceful* ganjil pada hasil operasi antara graf *cycle* ( $C_n$ ) dan graf *star* ( $S_m$ ) dengan ketentuan  $n \geq 3$  dan  $m \geq 1$ . Penulis juga berharap karya akhir ini dapat bermanfaat dalam perkembangan penelitian sejenis serta penulis berharap karya akhir ini dapat bermanfaat untuk membuka jalan perkembangan penelitian baru.

#### 1.4.2 Manfaat Praktis

##### 1.4.2.1 Bagi Peneliti

Menambah wawasan serta pengetahuan mendalam terkait dengan pewarnaan *graceful* ganjil pada hasil operasi antara graf *cycle* ( $C_n$ ) dan graf *star* ( $S_m$ ) untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 1$  dan menambah pengalaman penulis dalam menyusun karya

ilmiah, serta penelitian ini akan memanfaatkan ilmu pengetahuan matematika yang telah diperoleh selama menempuh pendidikan.

#### 1.4.2.2 Bagi Pembaca

Penulis berharap dalam penelitian ini bisa bermanfaat bagi pembaca dalam menambah wawasan dan pengetahuan lebih dalam, khususnya dalam teori graf mengenai pewarnaan *graceful* ganjil pada hasil operasi antara graf *cycle* ( $C_n$ ) dan graf *star* ( $S_m$ ) untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 1$ , juga penulis berharap dengan adanya penelitian ini dapat berguna untuk menjadi referensi atau acuan dalam penyusunan penelitian yang sejenis, dimana dapat bermanfaat bagi kehidupan sehari-hari.

