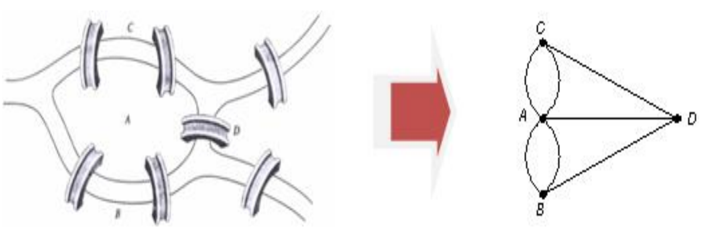
BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Jauh pada abad ke-18, terdapat sebuah jembatan di Kota Koningsberg yang kini lebih dikenal dengan Kota Kaliningrad, Rusia. Jembatan tersebut bernama Jembatan Koningsberg. Jembatan Koningsberg terdiri dari 7 buah jembatan yang menghubungkan 4 kota, warga Kota Koningsberg kala itu berpikir, mengenai kemungkinan untuk melewati setiap jembatan hanya tepat satu kali dan kemudian kembali ke tempat memulai perjalanannya (Setiawan, 2018). Pemikiran tersebut terus menjadi teka-teki yang terkenal hingga terdengar oleh seorang matematikawan asal Swiss bernama Leonhard Euler. Leonhard Euler yang lebih akrab disapa Euler kemudian merepresentasikan permasalahan tersebut dengan model graf, yang mana jembatan diibaratkan sebagai sisinya dan daratan yang dihubungkan oleh jembatan diibaratkan sebagai titik. Euler mengerjakan teka-teki tersebut, dan membuktikan bahwa kita tidak bisa melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat kita memulai (George, 2016). Hal ini dikarenakan terdapat lebih dari dua titik yang memiliki derajat ganjil. Berikut merupakan gambar yang direpresentasikan oleh Euler untuk memrepresentasikan gambar jembatan.



Gambar 1.1 Representasi Jembatan Königsberg ke dalam Graf

Sumber: Azizi, T.A. (2021) *Eksplorasi Justifikasi dan Rasionalisasi Mahasiswa dalam Konsep Teori Graf*. Jurnal Pendidikan Matematika, 6(2), 47.

Gambar tersebut diambil dari artikel Tian AbduL Azizi yang berjudul *Ekplorasi Justifikasi dan Rasionalisasi Mahasiswa dalam Konsep Teori Graf.* Gambar tersebut menunjukkan representasi dari Jembatan Königsberg dalam bentuk graf. Graf tersebut bukan merupakan graf Euler karena tidak memungkinkan melewati setiap sisi tepat satu kali, dan juga bukan graf Hamilton karena tidak dapat melewati setiap sisi tepat satu kali (Aziz, 2021). Sehingga didapat konsep dasar dari teori graf pada tahun 1736 yaitu graf yang memungkinkan perjalanan melalui setiap sisi tepat sekali jika dan hanya jika semua simpul memiliki derajat genap dan tepat dua simpul dengan derajat ganjil, yang kemudian menjadi konsep dasar dari teori graf (Fleschner, 2020).

Teori graf itu sendiri merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang graf, dengan graf G memiliki pengertian yaitu hubungan antara himpunan titik tak kosong yang dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ dengan n jumlah masing-masing titik atau sisi (Maulani, 2023). Dari hubungan sisi dan titik ini kemudian diimplementasikan pada berbagai permasalahan di dunia nyata baik permasalahan yang rumit hingga yang termudah pun seperti menghitung jarak lintasan, menyusun jadwal pelajaran, jadwal kerja, jadwal piket, hingga permasalahan mengenai pewarnaan dalam peta pun diselesaikan dengan graf yaitu menghitung berapa warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai kota dengan kota bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Salah satu jenis pewarnaan graf adalah pewarnaan *graceful*. Pewarnaan *graceful* pada suatu graf adalah pewarnaan dengan bilangan bulat pada titik-titiknya yang dimulai dengan bilangan bulat $\{1,2,3, \dots, k\}$ dengan k adalah bilangan bulat terkecil untuk mewarmai semua titik yang terdapat pada suatu graf, dengan syarat titik yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama, sehingga hasil selisih titik yang bertetangga akan menginduksi sisinya yang nantinya akan menjadi warna dari sisi tersebut. (Suparta dkk., 2023).

Salah satu jenis perkembangan pewarnaan *graceful* adalah pewarnaan *graceful* ganjil. Pewarnaan *graceful* ganjil pada suatu graf adalah pewarnaan pada setiap titiknya yang menginduksi setiap sisinya, sehingga warna pada sisinya adalah hasil selisih dari kedua titik yang bertetangga berupa bilangan ganjil $\{1,2,3,\ldots,k-1\}$ (Suparta dkk., 2023). Bilangan k terkecil yang digunakan untuk mewarnai suatu graf, disebut bilangan kromatik *graceful* ganjil yang dilambangkan dengan $Xog(G)$ = ∞ (Suparta dkk., 2023).

Graceful ganjil merupakan topik baru dalam dunia pewarnaan *graceful*, sehingga masih banyak jenis graf yang belum diketahui dapat tidaknya diberi pewarnaan ini. Tidak semua graf dapat diwarnai secara *graceful* ganjil, contohnya graf lingkaran dengan jumlah titik ganjil. Dalam artikel *On Odd-Graceful Coloring of Graphs* oleh (Suparta, dkk, 2023) Teorema 3 menyatakan bahwa graf lingkaran C_n dengan $n \geq 3$ dan n ganjil tidak dapat diberi pewarnaan *graceful* ganjil. Hal serupa juga dibahas oleh Daoud (2017) dalam *Edge Odd Graceful Labeling of Some Path and Cycle Related Graphs,* yang pada Teorema 9 menunjukkan bahwa graf gir G_n dapat dilabeli sisi secara *graceful* ganjil.

Penelitian ini fokus pada pencarian bilangan kromatik *graceful* ganjil dari graf gir, graf amalgamasi graf gir dengan graf gir dan graf amalgamasi graf gir dan graf bintang. Berdasarkan penelitian Daoud, graf gir dapat diberi pelabelan sisi *graceful* ganjil, namun pewarnaan titiknya dengan metode ini dan bilangan kromatiknya belum diketahui.

Penelitian ini juga didukung oleh teorema dari Suparta dkk. (2023) yang menyatakan bahwa jika G adalah graf dengan derajat maksimum Δ, maka $\chi_{og}(G) \geq 2\Delta$. Graf gir G_n merupakan perluasan graf roda W_n dengan penambahan titik pada pasangan titik bertetangga di lingkaran luarnya (Riza, 2021), sehingga bilangan kromatiknya bergantung pada derajat maksimum graf yang diteliti.

Selain itu, penelitian ini mengkaji graf yang berelasi dengan graf gir, khususnya graf amalgamasi titik pada graf gir, dinotasikan sebagai $Amal\ (G_{n_i})$. Penelitian sebelumnya oleh Diki Ipan menggabungkan dua graf gir berordo sama pada titik pusat dan mewarnainya dengan pewarnaan Johan. Pada penelitian ini, pengembangan dilakukan dengan mengamalgamasikan titik pusat graf gir dengan graf berordo berbeda $Amal\ (G_{n_i})$ serta jumlah graf yang lebih dari dua yaitu sebanyak m graf dan pengamalgamasian graf gir dengan graf bintang yang dilakukan pada titik-titik dilingkaran luarnya $Amal(G_n, 2nS_m)$.

Pada graf $Amal\ (G_{n_i})$ yang merupakan hasil amalgamasi graf gir dengan graf gbir pada titik pujsatnya dengan n_i adalah keterangan ordo setiap graf girnya dengan i yang merupakan indeks untuk $i = \{1,2,3 \dots . p\}$ sebanyak p graf. Pada graf gir tunggal G_n bersyarat $n \geq 2$ hal ini dikarenakan definisi dari graf gir adalah graf yang berasal dari graf roda yang diberikan titik di antara sisi yang bertetangga pada lingkaran luarnya, di mana graf roda itu sendiri berasal dari graf *cycle* genap C_{2n} (Riza, 2012) dengan $n \geq 1$ sehingga titik minimumnya adalah 2 oleh sebab itu pada beberapa artikel lambang dari graf gir adalah G_{2n}, sehinggan diperoleh bahwa nilai $n_i \geq 2$.

Graf $Amal\ (G_n, 2nS_m)$ merupakan graf hasil amalgamasi graf gir dengan graf bintang sebanyak $2n$ graf, yang diamalgamasikan pada setiap titik graf gir di lingkaran luarnya saja dengan ordo yang sama. Penelitian ini selain mencari bilangan kromatik pada graf gir tunggal G_n, juga akan mencari bilangan kromatik dari graf $Amal\ (G_{n_i})$ dan graf Gir yang diamalgamasikan dengan graf Bintang $Amal\ (G_n, 2n\ S_m)$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah berapakah bilangan kromatik garaceful ganjil pada graf G_n, $Amal\ (G_{n_i})$ dan graf $Amal\ (G_n, 2n\ S_m)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas adalah mengetahui bilangan kromatik *graceful* ganjil pada graf G_n, $Amal\ (G_{n_i})$, dan $Amal\ (G_n, 2nS_m)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapat dari penelitian ini meliputi:

1. Manfaat bagi peneliti

   Manfaat bagi peneliti adalah menambah pemahaman bagi para peneliti khususnya mengenai *graceful* ganjil, graf gir G_n, $Amal\ (G_{n_i})$, dan $Amal\ (G_n, 2nS_m)$.

2. Manfaat bagi pembaca

   Manfaat bagi pembaca adalah dapat memperluas wawasan mengenai *graceful* ganjil dan sabagai rujukan jika pembaca tertarik untuk melakukan pengembangan terhadap penelitian yang terkait.