

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu studi dalam ilmu matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh matematikawan asal Swiss, Leonhard Euler, pada tahun 1736. Sejak diperkenalkan melalui penyelesaian permasalahan jembatan Königsberg, teori graf telah memberikan kontribusi penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan praktis, antara lain masalah penjadwalan, penentuan rute terpendek, serta representasi struktur kimia (Sarma S. V. M., 2012).

Syarifudin dkk. (2023) menyatakan bahwa teori graf digunakan dalam struktur aljabar untuk menggambarkan suatu grup atau gelanggang sebagai sebuah graf, dengan anggotanya berperan sebagai simpul (*vertex*) sedangkan sisi-sisi (*edge*) antar simpul ditentukan oleh sifat-sifat dari grup atau gelanggang tersebut. Selain itu, Mansoori dkk. (2016) memperkenalkan graf non-koprima sebagai komplement dari graf koprima. Adapun Ma dkk. (2014) memperkenalkan graf koprima berupa grup berhingga, yang memuat simpul-simpul berupa elemen dari grup tersebut, dan dua simpul dihubungkan jika orde keduanya relatif prima. Selain itu, Akbari dkk. (2015) memperkenalkan graf irisan. Selanjutnya, Nikmehr & Khojasteh (2013) memperkenalkan graf nilpoten dari suatu gelanggang.

Graf nilpoten dari suatu gelanggang didefinisikan sebagai graf yang simpul-simpulnya mempresentasikan seluruh elemen gelanggang dengan dua simpul terhubung oleh sebuah sisi jika dan hanya jika hasil perkalian kedua elemen yang bersesuaian dengan elemen nilpoten dalam gelanggang dan gelanggang bilangan

bulat modulo n yang dilambangkan dengan Z_n adalah himpunan bilangan bulat $Z_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n - 1\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan secara modulo n sehingga elemen nilpoten dari suatu gelanggang adalah unsur yang dikalikan dengan dirinya sendiri secara berulang akan menghasilkan unsur nol (Malik D.P. dkk., 2023).

Indeks topologi merupakan suatu metrik yang digunakan untuk merepresentasikan berbagai karakteristik struktural dari sebuah graf, seperti jarak antar simpul, derajat simpul, atau sifat-sifat khusus lainnya yang mencerminkan aspek topologis dari graf tersebut (Yatin dkk., 2023). Terdapat peneliti telah mengkaji beberapa indeks topologi dari gelanggang bilangan bulat modulo n . Husni dkk. (2024) melengkapi tentang Szeged Indeks dan Padmakar-Ivan Indeks dari graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo prima berpangkat.

Indeks Randic adalah indeks topologi yang ditemukan pada tahun 1975 oleh Milan Randic. Indeks ini banyak diteliti dan telah menjadi salah satu indeks topologi yang paling banyak digunakan dalam bidang kimia dan matematika khususnya dalam kajian teori graf. Indeks Randic didefinisikan sebagai berikut.

$$R(G) = \sum_{(u,v) \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}}$$

Beberapa penelitian terkait indeks Randic yang telah dilakukan. Alfain (2024) mengkaji tentang indeks Randic dan sum-connectivity indeks serta koindeks pada graf total dari ring komutatif bilangan bulat modulo. Sedangkan Abdurahim dkk. (2025) mengkaji terkait indeks Randic dari graf koprima dari grup bilangan bulat modulo n . Berdasarkan uraian yang telah disampaikan sebelumnya, penelitian ini akan difokuskan pada kajian mengenai **“Indeks Randic Pada Graf Nilpoten Dari**

Gelanggang Bilangan Bulat Modulo”.

1.2 Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, permasalahan utama yang dikaji dalam penelitian ini berkaitan dengan rumus umum dan nilai indeks Randic dari gelanggang bilangan bulat untuk beberapa bentuk n yang mempresentasikan graf nilpoten dari \mathbb{Z}_n yaitu, pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan p yang merupakan bilangan prima $\Gamma(\mathbb{Z}_p)$, pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan p^k yang merupakan bilangan prima bilangan prima berpangkat $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})$, pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan pq yang merupakan perkalian dua bilangan prima $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ dan pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan $p^k q^l$ yang merupakan perkalian dua bilangan prima berpangkat $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$.

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan diatas, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut.

1. Berapa nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_p ?
2. Berapa nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{p^k} ?
3. Berapa nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{pq} ?
4. Berapa nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$?

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang sudah dirumuskan, maka tujuan penelitian ini sebagai berikut.

1. Memaparkan informasi terkait indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo.
2. Memberikan informasi keterkaitan antara beberapa topik dalam matematika, khususnya teori graf dan struktur aljabar
3. Menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan graf nilpoten dan indeks topologi lainnya.

1.5 Tujuan Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian ini, maka manfaat penelitian ini sebagai berikut.

1. Menentukan nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_p .
2. Menentukan nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{p^k} .
3. Menentukan nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{pq} .
4. Menentukan nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$.