

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari struktur diskrit yang terdiri dari simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*) (Suparta, 2021). Graf digunakan untuk merepresentasikan hubungan antar objek dalam berbagai sistem, seperti jaringan komputer, sistem transportasi, analisis data, hingga pemodelan sosial. Seiring perkembangan teknologi, teori graf semakin banyak diterapkan dalam berbagai bidang, termasuk optimasi jaringan, algoritma pencarian, dan sistem pengkodean (Prihatmaja, 2017). Secara formal, sebuah graf G dapat didefinisikan sebagai pasangan $G = (V, E)$, di mana $V(G)$ adalah himpunan simpul dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan pasangan simpul dalam graf tersebut (Suparta, 2021).

Salah satu topik dalam teori graf adalah pewarnaan graf, yaitu proses pemberian warna pada simpul atau sisi graf dengan aturan tertentu. Konsep pewarnaan graf pertama kali diperkenalkan dalam konteks pewarnaan peta oleh Francis Guthrie pada tahun 1852, yang melahirkan Teorema Empat Warna (*Four Color Theorem*) (Firdaus, 1976). Teorema ini menyatakan bahwa setiap graf planar dapat diwarnai dengan maksimal empat warna tanpa ada dua simpul bertetangga yang memiliki warna yang sama. Sejak saat itu, penelitian tentang pewarnaan graf berkembang pesat dengan berbagai pendekatan matematis dan algoritmik. Dalam pewarnaan graf, jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai simpul atau sisi suatu graf disebut bilangan kromatik dan dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Sebagai contoh, graf kosong graf yang hanya memiliki satu simpul tanpa sisi memiliki bilangan kromatik $\chi(G) = 1$, sedangkan graf planar dapat diwarnai dengan paling banyak empat warna sesuai dengan Teorema Empat Warna (Firdaus, 1976).

Dalam teori graf, konsep pewarnaan tidak hanya terbatas pada pewarnaan simpul dan sisi, tetapi juga mencakup bentuk pewarnaan yang lebih kompleks, salah satunya adalah pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*). Pewarnaan pelangi bertujuan agar setiap pasangan simpul dalam suatu graf terhubung melalui lintasan yang terdiri atas sisi-sisi dengan warna berbeda, sehingga membentuk lintasan pelangi. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh (Chartrand et al., 2008). sebagai pendekatan untuk meningkatkan efisiensi dalam jaringan komunikasi, serta untuk memastikan keberadaan jalur bebas konflik dalam struktur jaringan kompleks.

Secara umum, jumlah warna minimum yang diperlukan agar setiap pasangan simpul terhubung oleh lintasan pelangi disebut sebagai bilangan keterhubungan pelangi dan dinotasikan dengan $rc(G)$ (*rainbow connection number*) (Gopalakrishnan et al., 2024). Konsep ini memiliki berbagai aplikasi praktis, seperti dalam keamanan jaringan, perancangan jaringan komunikasi yang tahan gangguan, serta dalam kriptografi dan pengkodean informasi.

Seiring berkembangnya penelitian di bidang pewarnaan graf, para peneliti mulai menggabungkan konsep pewarnaan pelangi dengan pelabelan antiajaib (*antimagic labeling*), sehingga melahirkan konsep baru yang dikenal sebagai pewarnaan pelangi anti ajaib (*rainbow antimagic coloring*). Konsep ini pertama kali

diperkenalkan oleh Sulistiyono, Budi, Jabbar, dan Septory dalam beberapa publikasi pada tahun 2020 dan 2021. Mereka berhasil mengembangkan pewarnaan antiajaib pelangi untuk beberapa graf dasar dan mengkaji sifat-sifat serta nilai koneksi antiajaib pelangi dari graf-graf tersebut. Dalam pewarnaan ini, tidak hanya dituntut keberadaan lintasan pelangi, tetapi juga setiap lintasan tersebut harus memiliki bobot yang unik. Bobot lintasan didefinisikan sebagai jumlah label atau warna dari sisi-sisi yang dilaluinya. Dengan demikian, tidak boleh ada dua lintasan pelangi dengan jumlah bobot yang sama (Septory et al., 2021a).

Konsep pewarnaan pelangi antiajaib meningkatkan kompleksitas dari struktur pewarnaan graf karena menggabungkan dua syarat sekaligus: keterhubungan pelangi dan sifat antiajaib. Gabungan kedua sifat ini membuka peluang penerapan lebih luas, terutama dalam desain jalur komunikasi aman, sistem pengkodean berbasis graf, dan pemetaan jalur unik dalam sistem jaringan (Septory et al., 2021a).

Pada pewarnaan pelangi antiajaib, Misalkan G merupakan sebuah graf tidak terarah, sederhana, dan terhubung dengan $|V(G)|$ titik disebut pewarnaan antiajaib pelangi jika memenuhi syarat pelabelan antiajaib dan pewarnaan pelangi. Untuk memenuhi syarat pelabelan antiajaib suatu graf diberikan pelabelan bijektif f dari himpunan titik $V(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, |V(G)|\}$. Untuk memenuhi pewarnaan pelangi maka untuk setiap lintasan $x - y$ memiliki bobot sisi yang berbeda beda $w(xy) \neq w(x'y')$, di mana $w(xy) = f(x) + f(y)$ dan $x, y \in V(G)$. Definisi jika suatu graf G yang memenuhi kedua syarat pelabelan antiajaib dan pewarnaan pelangi, bilangan warna terkecil k disebut sebagai bilangan koneksi antiajaib pelangi dari graf G dan dilambangkan dengan $rac(G)$. Konsep ini masih tergolong baru dan

terus dikembangkan, berikut adalah beberapa penelitian graf terkait pewarnaan antiajaib pelangi, (graf yang sudah diteliti)

Masalah terbuka yang ditemukan pada penelitian Akadji et al. (2021), yaitu menentukan nilai eksak dari bilangan hubungan anti ajaib pelangi untuk berbagai jenis graf, termasuk graf reguler, graf unisiklik, dan operasi graf lainnya. Salah satu struktur graf yang menarik untuk dikaji dalam konteks pewarnaan pelangi antiajaib adalah graf slinky ($Sl_n C_4$). Graf ini merupakan hasil penggabungan beberapa graf lingkaran C_4 secara berurutan sehingga membentuk pola berulang yang menyerupai struktur pegas atau slinky (Akadji et al., 2021). Struktur ini menarik untuk diteliti karena memiliki pola keterhubungan yang khas dan dapat dikembangkan lebih lanjut dalam berbagai aplikasi teori graf. Meskipun beberapa penelitian sebelumnya telah membahas tentang *rainbow vertex connection number* dan *strong rainbow vertex connection number* (Akadji et al., 2021). Masih terdapat banyak celah yang belum terjawab secara lengkap, terutama dalam konteks bilangan hubungan pelangi dan bilangan hubungan antiajaib pelangi pada graf slinky ($Sl_n C_4$). Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan menentukan bilangan hubungan pelangi(rc) dan bilangan hubungan antiajaib pelangi (rac) pada graf slinky ($Sl_n C_4$), sehingga dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan teori pewarnaan graf serta aplikasinya dalam bidang yang lebih luas. Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, penelitian ini dirumuskan dengan judul “Pewarnaan Pelangi dan Pewarnaan Antiajaib Pelangi pada Graf *Slinky* $Sl_n C_4$ ”.

1.2. RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan uraian dari latar belakang adapun rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah berapa nilai eksak bilangan hubungan pelangi dan bilangan hubungan antiajaib pelangi pada graf *slinky* ($Sl_n C_4$)?

1.3. TUJUAN PENELITIAN

Berdasarkan rumusan masalah di atas tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan nilai eksak bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan antiajaib pelangi pada graf *slinky* ($Sl_n C_4$)

1.4. MANFAAT PENELITIAN

Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat bagi ilmu pengetahuan khususnya dibidang matematika baik secara teoritis maupun praktis. Adapun manfaat secara teoritis dan praktis tersebut sebagai berikut.

1.4.1. Manfaat Teoritis

Adapun manfaat teoritis yang diharapkan penulis dalam melakukan penelitian ini adalah menambah wawasan dan pengetahuan serta memberikan sumbangsih pemikiran pada bidang matematika khususnya dalam teori graf tentang pewarnaan pelangi dan pewarnaan antiajaib pelangi.

1.4.2. Manfaat Praktis

a) Bagi Penulis

Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan terkait pewarnaan pelangi dan pewarnaan antiajaib pelangi pada graf, menentukan bilangan rc dan rac pada graf dan mendapatkan pengalaman dalam

melaksanakan penelitian dan menyusun karya ilmiah, serta dapat mengaplikasikan ilmu matematika yang sudah dipelajari.

b) Bagi Pembaca

Menambah wawasan dan menjadi referensi pembaca mengenai pewarnaan pelangi dan pewarnaan antiajaib pelangi pada graf, menentukan nilai rc dan rac pada graf sehingga dapat dijadikan acuan dalam melaksanakan penelitian yang sama.

