

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori Graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Graf $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan simpul yang dinotasikan dengan $V(G)$, $V(G) \neq 0$ dan himpunan sisi yang menghubungkan dua simpul di $V(G)$ yang dinotasikan dengan $E(G)$. Kardinalitas dari $V(G)$ disebut orde dari G dapat dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan kardinalitas dari $E(G)$ disebut ukuran dari G dapat dinotasikan dengan $|E(G)|$.

Kajian pada graf meliputi pelabelan graf, pewarnaan graf, indeks topologi pada graf, dan invarian numerik pada graf. Budayana et al. (2018) dan Suparta et al. (2023) mengkaji pelabelan graceful. Dewi et al. (2018) mengkaji pelabelan ketidakteraturan sisi. Narita et al. (2021) mengkaji terakit *edge-antimagic total labeling*. Suparta et al. (2023) mengkaji terkait bilangan graceful kromatik pada graf. Dewi (2022) mengkaji terkait *modular irregularity strength* pada graf.

Terdapat beberapa operasi pada graf yaitu *join*, *kartesian product*, dan *comb product*. Operasi *join* pada graf dapat dilihat pada Suparta et al. (2023). Diberikan graf G dan H adalah graf terhubung dengan v adalah simpul pada H , *comd product* dapat dinotasikan dengan $G \triangleright H$ yang didapat dari mengambil satu salinan graf G dan membuat salinan graf H sebanyak simpul pada graf G , dengan mengidentifikasi titik v dari setiap salinan ke- i dari graf H pada titik ke- i dari graf G (I. H. Agustin et al., 2017). Bilangan dominasi merupakan salah satu konsep pada invarian numerik. Invarian numerik pada graf adalah ukuran atau parameter numerik yang mencerminkan struktural dari sebuah graf, dan tetap konstan terhadap isomorfisme graf. Diberikan graf $G = (V, E)$ sebuah himpunan $D \subseteq V(G)$ pada graf G disebut himpunan dominasi jika setiap $v \in V(G) \setminus D$ memiliki tetangga dalam himpunan

D . Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi dari graf G disebut bilangan dominasi dari graf G , dinotasikan dengan $\gamma(G)$ (Liu, 2021). Sebuah himpunan $D \subseteq V(G)$ pada graf G disebut himpunan dominasi lokal jika setiap tetangga $u, v \in V(G) \setminus D$ beririsan dengan D dan $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokal dari graf G disebut bilangan dominasi sisi lokal dari graf G , dinotasikan dengan $\gamma_\ell(G)$ (I. H. Agustin et al., 2017). Sebuah himpunan $D \subseteq E(G)$ pada graf G disebut himpunan dominasi sisi jika setiap $e \in E(G) \setminus D$ memiliki tetangga dalam himpunan D . Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi dari graf G disebut bilangan dominasi sisi dari graf G , dinotasikan dengan $\gamma'(G)$ (Chaemchan, 2010). Bilangan dominasi sisi lokal merupakan suatu konsep dalam teori graf yang berkaitan dengan himpunan sisi yang dapat mendominasi seluruh sisi dalam graf dengan kondisi tertentu. Himpunan $D \subseteq E(G)$ pada graf G disebut himpunan dominasi sisi lokal jika untuk setiap pasangan sisi $e_1, e_2 \in E(G) \setminus D$, $N(e_1) \cap D \neq \emptyset$, $N(e_2) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(e_1) \cap D \neq N(e_2) \cap D$. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi lokal dari graf G disebut bilangan dominasi sisi lokal dari graf G , dinotasikan dengan $\gamma'_\ell(G)$ (I. Agustin et al., 2018).

Penelitian terkait graf terus berkembang seperti penelitian terkait bilangan dominasi sisi lokal, dimulai penelitian dari Slater (1987) yang membahas tentang dominasi dan lokal pada graf asiklik. Penelitian inilah yang menjadi pondasi awal terlahirnya bilangan dominasi sisi lokal. Penelitian dari Klostermeyer and Yeo (2015) membahas tentang bilangan dominasi sisi pada graf grid yang merupakan hasil operasi kartesius dari dua graf lintasan. Penelitian dari Foucaud et al. (2016) membahas tentang himpunan dominasi lokal pada graf kembar bebas. Penelitian dari Adawiyah et al. (2018) membahas tentang bilangan dominasi sisi lokal pada beberapa graf yang relevan dengan graf roda, yaitu graf *gear*, graf *helm*, dan graf kipas. Penelitian tersebut menghasilkan beberapa teorema yaitu bilangan dominasi sisi lokal dari graf *gear* (G_n) dengan orde $2n + 1$ untuk $n \geq 4$, graf *helm* (H_n)

dengan orde $2n + 1$ untuk $n \geq 4$, dan graf kipas F_n dengan orde $n + 1$ untuk $n \geq 2$. Pada graf (G_n) maka $\gamma'_\ell(G_n) = n$, pada graf H_n maka $\gamma'_\ell(H_n) = n$, dan pada graf F_n maka $\gamma'_\ell(F_n) = n$ untuk $n = 2$, $\gamma'_\ell(F_n) = n - 1$ untuk $3 \leq n \leq 5$, $\gamma'_\ell(F_n) = \frac{2n}{3}$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $n \leq 6$, $\gamma'_\ell(F_n) = \frac{2n+1}{3}$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ dan $n \leq 6$, dan $\gamma'_\ell(F_n) = \frac{2n+2}{3}$ untuk $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $n \leq 6$. Penelitian yang dilakukan oleh I. Agustin et al. (2018) membahas bilangan dominasi sisi lokal pada beberapa graf dan hasil *comb product* dari dua buah graf. Penelitian tersebut menghasilkan teorema yaitu bilangan dominasi sisi lokal pada graf bintang $K_{1,n}$, graf siklus C_n , graf lintasan P_n , graf comb bintang $P_n \triangleright K_{1,m}$, dan graf siklus comb bintang $C_n \triangleright K_{1,m}$. Pada graf bintang $K_{1,n}$ maka $\gamma'_\ell(K_{1,n}) = n - 1$, pada graf siklus maka $\gamma'_\ell(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$, pada graf lintasan P_n maka $\gamma'_\ell(P_n) = n - 1$, pada graf comb bintang $P_n \triangleright K_{1,m}$ maka $\gamma'_\ell(P_n \triangleright K_{1,m}) = nm - m$, dan pada graf siklus comb bintang $C_n \triangleright K_{1,m}$ maka $\gamma'_\ell(C_n \triangleright K_{1,m}) = nm - m$. Penelitian tersebut juga menghasilkan *lemma* yaitu untuk dua graf berbeda G dan H maka berlaku $\gamma'_\ell(G \triangleright H) \geq |V(G)| \times \gamma'_\ell(H)$.

Berdasarkan hal yang telah dipaparkan sebelumnya, penulis akan melakukan kajian tentang bilangan dominasi sisi lokal dari beberapa graf dan hasil *comb product*nya untuk menjawab masalah terbuka yang disampaikan oleh Adawiyah et al. (2018). Penelitian ini mengkaji bilangan dominasi sisi lokal dari graf Sf_n , graf $M(C_n)$, graf Dk_n , graf $Sf_n \triangleright Sf_m$, graf $M(C_n) \triangleright M(C_m)$, dan graf $Dk_n \triangleright Dk_m$. Penelitian ini relevan dengan penelitian sebelumnya dikarenakan konsep yang akan digunakan pada penelitian ini berkaitan dengan konsep dari penelitian sebelumnya. Perbedaan yang paling mendasar pada penelitian ini terdapat pada jenis graf yang akan digunakan. Dari hal tersebut diharapkan, dengan ditemukannya bilangan dominasi sisi lokal pada beberapa graf yang akan dikaji oleh penulis, dapat memberikan kontribusi dalam mengembangkan teori yang ada pada graf sehingga penulis mengangkat penelitian dengan judul **"Bilangan Dominasi Sisi Lokal dari Beberapa Graf Bunga dan Hasil Comb Productnya"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, adapun permasalahan yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini yaitu :

1. Berapa bilangan dominasi sisi lokal dari graf *sunflower* (Sf_n)?
2. Berapa bilangan dominasi sisi lokal dari graf *rose* ($M(C_n)$)?
3. Berapa bilangan dominasi sisi lokal dari graf *daisy* (Dk_n)?
4. Berapa bilangan dominasi sisi lokal dari graf *sunflower comb sunflower* ($Sf_n \triangleright Sf_m$)?
5. Berapa bilangan dominasi sisi lokal dari graf *rose comb rose* ($M(C_n) \triangleright M(C_m)$)?
6. Berapa bilangan dominasi sisi lokal dari graf *daisy comb daisy* ($Dk_n \triangleright Dk_m$)?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, adapun tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini yaitu :

1. Mengetahui bilangan dominasi sisi lokal dari graf *sunflower* (Sf_n)
2. Mengetahui bilangan dominasi sisi lokal dari graf *rose* ($M(C_n)$)
3. Mengetahui bilangan dominasi sisi lokal dari graf *daisy* (Dk_n)
4. Mengetahui bilangan dominasi sisi lokal dari graf *sunflower comb sunflower* ($Sf_n \triangleright Sf_m$)
5. Mengetahui bilangan dominasi sisi lokal dari graf *rose comb rose* ($M(C_n) \triangleright M(C_m)$)
6. Mengetahui bilangan dominasi sisi lokal dari graf *daisy comb daisy* ($Dk_n \triangleright Dk_m$)

1.4 Manfaat Penelitian

Secara umum, manfaat dari penelitian ini dapat dikategorikan menjadi dua, yaitu manfaat teoritis dan manfaat praktis. Manfaat teoritis dan manfaat praktis tersebut adalah sebagai berikut.

1. Manfaat Teoritis

Manfaat teoritis yang diperoleh dari penelitian ini adalah memperluas wawasan dan pengetahuan serta memberikan kontribusi pemikiran dalam bidang matematika, khususnya pada teori graf dengan topik bilangan dominasi sisi lokal.

2. Manfaat Praktis

Adapun manfaat praktis yang diperoleh melalui hasil penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Bagi Penulis

Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan mengenai topik dalam teori graf, yaitu bilangan dominasi sisi lokal pada beberapa graf dan hasil *comb product*nya, memperoleh pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah, serta mengaplikasikan ilmu matematika yang telah dipelajari.

b. Bagi pembaca

Memperluas wawasan dan menjadi referensi bagi pembaca mengenai bilangan dominasi sisi lokal pada beberapa graf dan hasil *comb product*nya. Selain itu, diharapkan dapat memotivasi serta menginspirasi pembaca untuk mengembangkan penelitian lebih lanjut dalam topik bilangan dominasi sisi lokal pada graf lainnya.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini berfokus pada hal yang diinginkan oleh penulis, maka terdapat batasan masalah dalam penelitian ini yaitu :

1. Penelitian ini berfokus mencari bilangan dominasi sisi lokal dari graf *sunflower* (Sf_n)
2. Penelitian ini berfokus mencari bilangan dominasi sisi lokal dari graf *rose* ($M(C_n)$)
3. Penelitian ini berfokus mencari bilangan dominasi sisi lokal dari graf *daisy* (Dk_n)
4. Penelitian ini berfokus mencari bilangan dominasi sisi lokal dari graf *sunflower comb sunflower* ($Sf_n \triangleright Sf_m$)
5. Penelitian ini berfokus mencari bilangan dominasi sisi lokal dari graf *rose comb rose* ($M(C_n) \triangleright M(C_m)$)
6. Penelitian ini berfokus mencari bilangan dominasi sisi lokal dari graf *daisy comb daisy* ($Dk_n \triangleright Dk_m$)

