

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan titik yang tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang mungkin kosong, sedemikian sehingga setiap sisi di $E(G)$ adalah pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf adalah pemetaan yang memetakan titik atau sisi ke suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau bilangan bulat non negatif). Bilangan-bilangan tersebut disebut label. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelannya disebut pelabelan titik, jika domainnya adalah sisi maka pelabelannya disebut pelabelan sisi, jika domain dari pemetaannya adalah titik dan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total. Pewarnaan graf terdiri dari tiga macam yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan muka. Pewarnaan graf pada graf G erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik yaitu menentukan jumlah warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan graf G .

Dalam tulisan ini, mengkaji tentang pelabelan dan pewarnaan anti ajaib yaitu pelabelan dan pewarnaan sisi total super anti ajaib lokal. Konsep pelabelan anti ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Suatu graf dengan p sisi disebut anti ajaib, jika sisinya dapat dilabeli dengan $1, 2, 3, \dots, p$ tanpa pengulangan sehingga jumlah label dari sisi yang terkait untuk setiap titik berbeda. Sedangkan

konsep pewarnaan titik anti ajaib lokal pertama kali diperkenalkan oleh Arumugan dkk. Hadiputra dkk (2019) mengungkapkan bahwa pelabelan total anti ajaib lokal sisi adalah suatu bijeksi $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G) + E(G)|\}$, dimana setiap dua sisi yang berdekatan uv dan vx berlaku $w(uv) \neq w(vx)$ dengan $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$ untuk setiap sisi uv di G . Jadi pelabelan total anti ajaib lokal sisi menginduksi pewarnaan sisi jika setiap sisi e ditentukan oleh warna $w(e)$. Bilangan kromatik total anti ajaib lokal sisi dinotasikan dengan $\gamma_{\text{leat}}(G)$ adalah jumlah warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan graf G yang disebabkan oleh pelabelan total anti ajaib lokal sisi. Jika label-label terkecil muncul pada titik pada pelabelan total maka pelabelannya disebut pelabelan total super anti ajaib lokal sisi dan untuk bilangannya dinotasikan dengan $\gamma_{\text{sleat}}(G)$.

Hadiputra dkk (2019) meneliti tentang pewarnaan sisi total super anti ajaib lokal pada graf lintasan dan turunannya yaitu graf lintasan dengan $\gamma_{\text{sleat}}(P_n) = 2$, graf lintasan dengan penambahan satu atau beberapa sisi, graf *hedge*, graf *hedgerow*, dan penggabungan dari graf bintang. Graf *hedge* adalah graf yang terdiri dari dua graf lintasan yang dihubungkan oleh satu sisi.

Hadiputra dkk (2019) meneliti nilai bilangan kromatik (γ_{sleat}) dari graf *hedgerow* $Hr(m, n, i, j)$. Graf *hedgerow* $Hr(m, n, i, j)$ adalah graf yang terdiri dari m graf lintasan dengan n titik pada masing-masing lintasan dimana titik ke- i , $1 \leq i \leq n$, pada lintasan ke- k dihubungkan oleh sisi baru ke titik ke- j , $1 \leq j \leq n$, pada lintasan ke- $k+1$. Berdasarkan hal tersebut, Hadiputra dkk (2019) merumuskan teorema sebagai berikut.

Teorema 1.1 [Hadiputra, Silaban, dan Maryati] Pada graf *hedgerow* $Hr(m, n, i, j)$ untuk

$$m \geq 2 \text{ dan } n \geq 2,$$

1. Jika n genap dengan $i \neq j$ dan $i \neq n - j + 1$, maka $(\gamma_{\text{sleat}}) = 3$.
2. Jika m ganjil dengan $i = j$ dan $i \notin \{1, n\}$, maka $(\gamma_{\text{sleat}}) = 4$.

Pada teorema 1.1 tersebut, telah terbukti untuk beberapa kondisi (m, n, i, j) , sehingga perlu dibuktikan untuk kondisi (m, n, i, j) lainnya. Hal tersebut dirumuskan oleh Hadiputra dkk (2019) sebagai masalah terbuka berikut.

Masalah Terbuka 1.1 Temukan nilai dari $\gamma_{\text{sleat}} Hr(m, n, i, j)$ untuk kondisi (m, n, i, j) yang lainnya.

Berdasarkan hal tersebut, penelitian ini akan berfokus untuk menemukan nilai dari $\gamma_{\text{sleat}} Hr(m, n, i, j)$ untuk kondisi (m, n, i, j) yang lainnya. Beberapa kondisi (m, n, i, j) yang akan diteliti yaitu sebagai berikut.

- 1) Untuk n genap dengan $i \neq j$ dan $i = n - j + 1$,
- 2) Untuk n ganjil dengan $i \neq j$ dan $i \neq n - j + 1$,
- 3) Untuk m ganjil dengan $i = j$ dan $i \in \{1, n\}$, dan
- 4) Untuk m ganjil dengan $i \neq j$ dan $i \in \{1, n\}$.

Secara lebih tepat, penulis merumuskan penelitian ini dengan judul “**Pewarnaan Sisi Total Super Anti Ajaib Lokal pada Graf Hedgerow $Hr(m, n, i, j)$** ”.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang ingin dikaji pada penelitian ini adalah berapakah bilangan kromatik (γ_{sleat}) pada pewarnaan sisi total super anti ajaib lokal pada graf hedgerow $Hr(m, n, i, j)$?

1.3 Tujuan Penulisan

Mengacu pada rumusan masalah yang diajukan, tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik (γ_{sleat}) pada pewarnaan sisi total super anti ajaib lokal pada graf hedgerow $Hr(m, n, i, j)$.

1.4 Manfaat Penulisan

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi ilmu pengetahuan dibidang matematika baik secara teoritis maupun praktis. Adapun manfaat secara teoritis dan praktis tersebut antara lain adalah sebagai berikut.

1.4.1 Manfaat Teoritis

Manfaat teoritis yang diharapkan peneliti adalah dapat memberikan sumbangan pemikiran, menambah kesenangan ilmu dibidang matematika, utamanya tentang pelabelan dan pewarnaan graf, dan memperkaya bahan bacaan serta menjawab masalah terbuka pada *Indonesian Journal Combinatorics Tentang Super Local Edge Anti-Magic Total Colouring Of Paths And Its Derivation*.

1.4.2 Manfaat Praktis

1. Bagi Pembaca

Manfaat penelitian ini bagi pembaca adalah dapat digunakan sebagai referensi bagi pembaca yang akan melakukan penelitian yang sejenis dan penelitian tentang pewarnaan graf dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pejadwalan, pewarnaan peta dan menemukan permasalahan terkait pemetaan daerah di suatu kabupaten atau kota.

2. Bagi Jurusan Matematika

Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan bacaan yang dapat digunakan sebagai referensi dalam pembelajaran teori graf atau sebagai referensi dalam pengembangan ilmu matematika khususnya bagi mahasiswa jurusan matematika.

