LAMPIRAN

Lampiran A. Bilangan Bulat Eisenstein

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya elemen satuan pada bilangan bulat Eisenstein. Bermula dengan menggunakan persamaan matematika yang dipaparkan oleh Gauss mengenai bidang Aljabar, yaitu

$$x^n - 1 = \prod_{m=1}^{n} \left(x - e^{\frac{2\pi i m}{n}}\right),$$

dengan $n = 3$, maka

$$x^3 - 1 = \prod_{m=1}^{3} \left(x - e^{\frac{2\pi i m}{3}}\right)$$

$$= \left(x - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\left(x - e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)\left(x - e^{2\pi i}\right)$$

$$= \left(x - \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x + \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\right)(x - 1)$$

$$x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1).$$

Sehingga dari sini didapatkan suatu persamaan untuk x^2, yaitu

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x^2 = -x - 1. \tag{A.1}$$

Dari pers. (A.1), maka didapatkan

$$\omega^2 = -\omega - 1,$$

dengan definisi fungsi norm dan proposisi elemen α bilangan bulat Eisenstein ($\mathbb{Z}[\omega]$) merupakan unit jika dan hanya jika $N(\alpha) = 1$, yang mana

$$N(\alpha) = \alpha\alpha^* = 1,$$

$$(a + b\omega)(a + b\omega^*) = 1,$$

dengan $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, maka didapatkan

$$a^2 - ab + b^2 = 1,$$

sehingga didapatkan suatu relasi, yaitu

$$a^2 + b^2 = 1 + ab, \tag{A.2}$$

dengan pernyataan,

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega | a, b \in \mathbb{Z}\}. \tag{A.3}$$

Pada pers. (A.2), jika $a = 1$ dan $b = 0$, maka memenuhi pada pernyataan (A.3), yaitu

$$1 + 0 = 1 + 0,$$

jika $a = -1$, dan $b = 0$, maka

$$1 + 0 = 1 + 0,$$

jika $a = 1$, dan $b = 1$, maka didapatkan

$$1 + 1 = 1 + 1,$$

jika $a = -1$, dan $b = -1$, didapatkan bahwa

$$1 + 1 = 1 + 1,$$

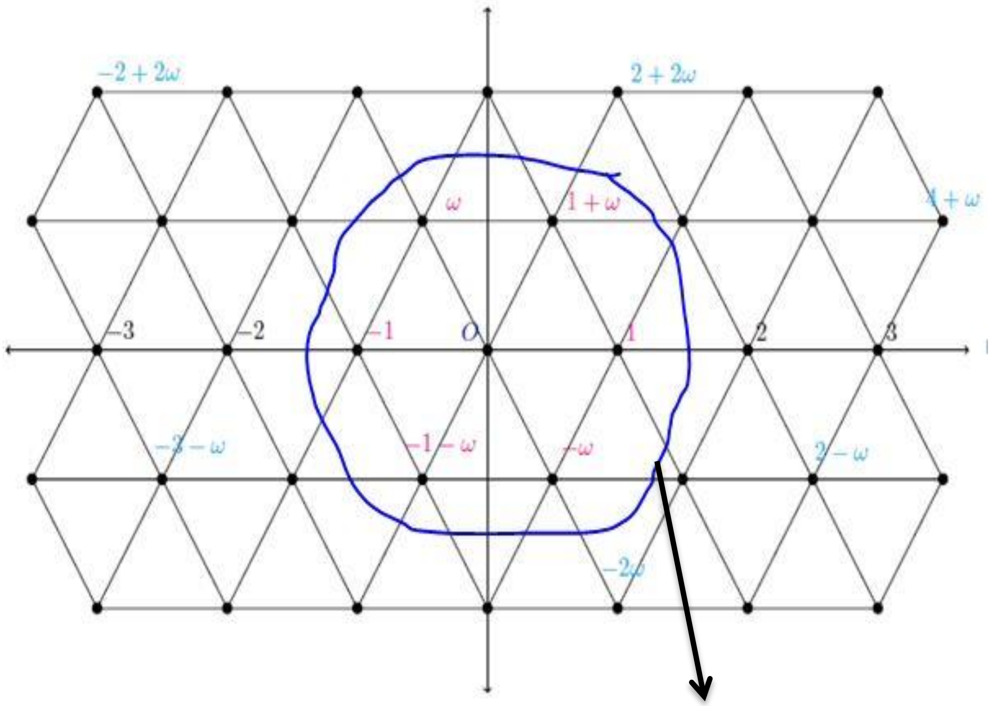
jika $a = 0$, dan $b = 1$, maka

$$0 + 1 = 1 + 0,$$

dan jika $a = 0$, dan $b = -1$, maka

$$0 + 1 = 1 + 0.$$

Dari pernyataan-pernyataan ini membentuk sebuah grup siklik dan didapatkan sebuah pola kisi seperti yang ditampilkan pada Gambar A, yaitu



elemen satuan

Gambar. A Elemen satuan (*unit*) pada bilangan bulat Eisenstein yang dilingkari dengan lingkaran berwarna biru (Sumber : Parker, dkk, 2016).

Lampiran B. Bilangan Triangulasi Virus

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan bilangan triangulasi virus. Untuk kalkulasi bilangan triangulasi pada virus dengan menggunakan bilangan bulat Eisenstein, yaitu

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\,, \tag{B.1}$$

kemudian dengan koordinat $\omega + 1 = u$, maka didapatkan

$$u = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\ dan\ u^* = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{B.2}$$

Menyelesaikan perkalian antara persamaan α dan α^*, yaitu

$$\alpha\alpha^* = (a + ub)(a + u^*b) = a^2 + ab(u^* + u) + uu^*b^2$$

$$\alpha\alpha^* = a^2 + ab + b^2,$$

sehingga didapatkan suatu persamaan untuk menentukan bilangan triangulasi kapsid virus, yaitu

$$T = a^2 + ab + b^2.$$

Lampiran C. ***Plane Strain***

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan dan solusi persamaan regangan bidang. Komponen keterkaitan antara *strain-displacement*, yaitu

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$e_z = e_{xz} = e_{yz} = 0.$$

Hukum Hooke untuk kasus isotropik, komponen tegangannya yaitu,

$$\sigma_x = \lambda(e_x + e_y) + 2\mu e_x$$

$$\sigma_y = \lambda(e_x + e_y) + 2\mu e_y$$

$$\sigma_z = \lambda(e_x + e_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu e_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

dan untuk persamaan *strain* dalam *stress* yaitu,

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\lambda + \mu)(e_x + e_y)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\mu(e_x - e_y),$$

dengan mengeleminasikan variabel e_y , maka didapatkan bahwa

$$2e_x = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2(\lambda + \mu)} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\mu}$$

$$e_x = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{4(\lambda + \mu)} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{4\mu},$$

dengan $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, dan $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

Sehingga didapatkan suatu persamaan *strain* dalam *stress* untuk komponen x, y dan xy, yaitu

$$e_x = \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right]$$

$$e_y = \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right]$$

$$e_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E}\left[\tau_{xy}\right],$$

dengan menggunakan relasi Saint-Venant,

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y},$$

kemudian dengan mensubstitusikan persamaan *strain* untuk komponen x, y dan xy ke dalam relasi Saint-Venant, maka didapatkan

$$(1-\nu)\left[\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right]-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right)=2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y},$$

dengan

$$(1-\nu)\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)$$

$$(1-\nu)\left[\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right]=(1-\nu)\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)$$

$$(1-\nu)\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}.$$

Dari persamaan kesetimbangan, yaitu

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_x=0$$

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial F_x}{\partial x},$$

dan

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+F_y=0$$

$$\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=-\frac{\partial F_y}{\partial y}$$

$$2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=-\frac{\partial F_x}{\partial x}-\frac{\partial F_y}{\partial y},$$

yang pada akhirnya persamaan kompatibilitas untuk kasus *plane strain*, yaitu

$$(1-\nu)\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}-\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right).$$

Lampiran D. *Plane Stress*

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan dan solusi persamaan tegangan bidang. Pelat elastis tipis mempresentasikan kondisi tegangan bidang (*plane stress)*. Untuk menentukan persamaan kompatibilitas tegangan bidang, langkah pertama adalah dengan menggunakan persamaan tegangan bidang yang telah disederhanakan yang komponen regangannya adalah

$$e_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$e_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$e_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_x + e_y)$$

$$e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\,\tau_{xy}$$

$$e_{xz} = e_{yz} = 0,$$

dengan menggunakan relasi Saint-Venant,

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y},$$

kemudian dengan mensubstitusikan variabel *strain* yang telah didapatkan ke persamaan relasi Saint-Venant, didapatkan

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)=2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{1}{(1+\nu)}\left(\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)-\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)\right)=2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{1}{(1+\nu)}\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2},$$

dan dengan persamaan kesetimbangan , yaitu

$$2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=-\frac{\partial F_x}{\partial x}-\frac{\partial F_y}{\partial y},$$

maka didapatkan persamaan kompatibilitas untuk kasus tegangan bidang, yaitu

$$\frac{1}{(1+\nu)}\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{\partial F_x}{\partial x}-\frac{\partial F_y}{\partial y}$$

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\nu)\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right).$$

Persamaan kompatibilitas untuk kasus *plane strain* dan *plane stress*, yaitu

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\text{... (kasus } plane\ strain\text{)}$$

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\nu)\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\text{... (kasus } plane\ stress\text{)}.$$

Dengan mengasumsikan *body force* merupakan sebuah turunan dari fungsi potensial V, yaitu

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}\ dan\ F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\ ,$$

dan dari persamaan kesetimbangan,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0,$$

dengan mensubstitusikan $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ke persamaan kesetimbangan, maka didapatkan

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - V) = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

Kemudian untuk persamaan kesetimbangan yang kedua,

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y - V\right) = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y - V\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}.$$

Sehingga dari kalkulasi ini didapatkan suatu persamaan *stress* pada komponen x, y dan xy, yaitu

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}.$$

Pada persamaan kompatibilitas untuk kasus *plane strain*, yaitu

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right),$$

dan kemudian dengan mensubstitusikan persamaan σ_x dan σ_y, maka didapatkan

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\phi = -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right),$$

sehingga didapatkan suatu persamaan, yaitu

$$\nabla^4 \phi = -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\nabla^2 V,$$

dan dengan menggunakan cara yang sama untuk kasus *plane stress*, didapatkan bahwa

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\phi = -(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right).$$

$$\nabla^4 \phi = -(1-\nu)\nabla^2 V.$$

Persamaan kompatibilitas *plane strain* dan *plane stress* untuk kasus relasi dengan *airy stress function*, yaitu

$$\nabla^4 \phi = -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\nabla^2 V$$

$$\nabla^4\phi = -(1-\nu)\nabla^2 V\,.$$

Jika tidak adanya *body force* atau dengan kata lain *body force* sama dengan nol maka,

$$\nabla^4\phi = 0.$$

Lampiran E. Fungsi Tegangan Airy (*Airy Stress Function*)

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan dan solusi persamaan fungsi tegangan Airy. Fungsi tegangan *Airy* untuk kasus polar terdiri dari $f(r)$ dan $g(\theta)$ yang dituliskan sebagai

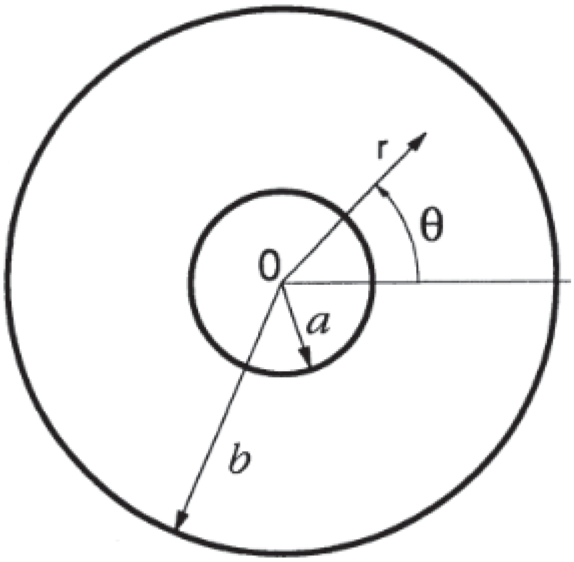
$$\phi(r,\theta) = f(r)g(\theta),$$

solusi biharmonik fungsi tegangan *Airy* adalah

$$\nabla^4\phi = 0,$$

$$\nabla^4\phi = \nabla^2\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\phi = 0.$$

Permasalahan umum mengenai koordinat polar dalam teori elastisitas adalah lempengan dengan lubang ditengahnya yang ditunjukkan pada Gambar E.



Gambar E. Lempengan dengan lubang ditengah (Sumber : Barber, 1992).

Tegangan dan perpindahan harus bernilai tunggal dan kontinu, karenanya tegangan dan perpindahan merupakan fungsi periodik θ. Maka dari itu dengan menggunakan fungsi $g(\theta)$ sebagai deret Fourier yang merupakan fungsi periodik, sehingga fungsi $g(\theta)$ dapat dinyatakan sebagai

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sin(n\theta),$$

solusi untuk $\phi(r,\theta) = f(r)\cos(n\theta)$, dan di *double* diferensialkan terhadap θ menjadi

$$\frac{\partial^2 \phi(r,\theta)}{\partial \theta^2} = -n^2\phi.$$

Dengan mensubstitusikan $\frac{\partial^2 \phi(r,\theta)}{\partial \theta^2} = -n^2\phi$ terhadap persamaan biharmonik, di dapatkan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}-\frac{n^2\phi}{r^2}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial^3}{\partial r^3}-\frac{(1+2n^2)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{(1+2n^2)}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n^2(4-n^2)}{r^4}\right)\phi=0\,.$$

Mensbstitusikan $\phi(r,\theta)=f(r)\cos(n\theta)$, didapatkan suatu persamaan, yaitu

$$\left(\frac{d^4}{dr^4}+\frac{2}{r}\,\frac{d^3}{dr^3}-\frac{(1+2n^2)}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{(1+2n^2)}{r^3}\frac{d}{dr}\right. \qquad \text{(E.1)}$$

$$\left.-\frac{n^2(4-n^2)}{r^4}\right)f=0$$

dengan $r=e^t$, didapatkan

$$\frac{dr}{dt}=r\;dan\;\;\frac{dt}{dr}=\frac{1}{r}$$

mengubah pernyataan $\frac{df}{dr},\frac{d^2f}{dr^2},\frac{d^3f}{dr^3}$ dan $\frac{d^4f}{dr^4}$ dalam bentuk $\frac{d^4f}{dt^4},\frac{d^3f}{dt^3},\frac{d^2f}{dt^2}$ dan $\frac{df}{dt}$ sehingga,

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$r\frac{df}{dr}=\frac{df}{dt} \qquad \text{(E.2)}$$

, kemudian mencari pernyataan $\frac{d^2f}{dr^2}$, yaitu

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{df}{dt}\right)$$

$$r\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{df}{dr} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\frac{dt}{dr}$$

$$r\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{df}{dr} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\frac{1}{r} \rightarrow r^2\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{df}{dt} = \frac{d^2f}{dt^2},$$

sehingga

$$r^2\frac{d^2f}{dr^2} = \frac{d^2f}{dt^2} - \frac{df}{dt}, \tag{E.3}$$

dan hasil $r^3\frac{d^3f}{dr^3}$, dan $r^4\frac{d^4f}{dr^4}$, yaitu sebagai berikut

$$r^3\frac{d^3f}{dr^3} = \frac{d^3f}{dt^3} - 3\frac{d^2f}{dt^2} + 2\frac{df}{dt}, \tag{E.4}$$

dan

$$r^4\frac{d^4f}{dr^4} = \frac{d^4f}{dt^4} - 6\frac{d^3f}{dt^3} + 11\frac{d^2f}{dt^2} - 6\frac{df}{dt}. \tag{E.5}$$

Subtitusikan pers. (E.2), (E.3), (E.4), dan (E.5) pada pers. (E.1), didapatkan

$$\frac{d^4f}{dt^4} - 4\frac{d^3f}{dt^3} + (4-2n^2)\frac{d^2f}{dt^2} + 4n^2\frac{df}{dt} - n^2(4-n^2)f = 0\,.$$

kemudian dengan $m = \frac{d}{dt}$, sehingga didapatkan suatu persamaan karakteristik, yaitu

$$m^4 - 4m^3 + (4 - 2n^2)m^2 + 4n^2m - n^2(4 - n^2) = 0$$

$$(m^2 - n^2)((m-2)^2 - n^2) = 0,$$

dengan demikian, akar persamaan karakteristik dapat ditulis sebagai,

$$m = \pm n\,, dan\; m = 2 \pm n.$$

Sehingga solusi $f(t)$, yaitu

$$f(t) = A_{n1}e^{(n+2)t} + A_{n2}e^{(-n+2)t} + A_{n3}e^{nt} + A_{n4}e^{-nt}$$

substitusikan $r = e^t$ didapatkan

$$f(r) = A_{n1}r^{n+2} + A_{n2}r^{-n+2} + A_{n3}r^n + A_{n4}r^{-n}$$

dengan demikian Solusi umum untuk $n \geq 2$, yaitu

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=2}^{\infty}(A_{n1}r^{n+2} + A_{n2}r^{-n+2} + A_{n3}r^n + A_{n4}r^{-n})\cos n\theta.$$

Kemudian mencari persamaan umum untuk kasus $n = 0$, jika $n = 0$, maka $m = 0,0,2,2$, karenanya solusi untuk persamaan diferensialnya, yaitu $\rho_1\, r^0 + \rho_2 r^2$, kemudian dengan menggunakan teknik yang sama, maka solusi independen dari kasus ini, yaitu

$$r^n\cos(n\theta), \text{dan } r^{2+n}\cos(n\theta),$$

solusi independen ini kemudian dideferensialkan terhadap n, yaitu

$$\left[\frac{d}{dn}(r^n\cos(n\theta))\right]_{n=0} = \ln r\,,$$

dengan

$$y = r^n$$

$$\ln y = \ln r^n$$

$$\ln y = n \ln r$$

$$\frac{d}{dn}(\ln y) = \ln r$$

$$\frac{dy}{dn}\frac{d}{dy}(\ln y) = \ln r$$

$$\frac{dy}{dn} = y \ln r$$

$$\frac{d}{dn}(r^n) = r^n \ln r,$$

dan untuk,

$$\left[\frac{d}{dn}(r^{n+2}\cos(n\theta))\right]_{n=0} = r^2 \ln r,$$

sehingga didapatkan,

$$\phi(r,\theta) = \rho_1 r^0 + \rho_2 r^2 + \rho_3 \ln r + \rho_4\, r^2 \ln r\,,$$

dengan ρ merupakan sebuah konstanta.

Kemudia lanjut untuk $n = 1$, jika $n = 1$, maka $m = -1,1,1,3$, untuk penyelesaiannya sama caranya dengan cara sebelumnya, maka

$$\left[\frac{d}{dn}(r^n\cos(n\theta))\right]_{n=1} = r \ln r \cos(\theta) - r\theta \sin(\theta)$$

$$\left[\frac{d}{dn}\left(r^{-n+2}\ \cos(n\theta)\right)\right]_{n=1} = -r\ln r\cos\theta - r\theta\sin\theta,$$

sehingga solusi umum untuk $n = 1$, yaitu

$$\phi(r,\theta) = \frac{\rho_5}{r}\cos\theta + \rho_6 r\cos\theta + \rho_7 r^3\cos\theta + \rho_8 r\ln r\cos\theta + \varrho_9 r\theta\sin\theta\ ,$$

dengan mengikuti cara yang sama untuk kasus $\sin n\theta$ didapatkan

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(B_{n1}r^{n+2} + B_{n2}r^{-n+2} + B_{n3}r^{n} + B_{n4}r^{-n}\right)\sin n\theta\ .$$

Ketika $n = 0$, maka $m = 0{,}0{,}2{,}2$, sehingga solusi persamaan diferensial-nya yaitu $\varrho r^0 + \varrho r^2$, dan ketika $n = 1$, maka $m = -1{,}1{,}1{,}3$, sama halnya dengan permasalahan sebelumnya untuk menyelesaikan kasus ini, sehingga untuk solusi $n = 0$, didapatkan

$$\phi(r,\theta) = \varrho_1\sin(0) + \varrho_2 r^2\sin(0) + \varrho_3\theta + \varrho_4 r^2\theta = \varrho_3\theta + \varrho_4 r^2\theta\ ,$$

dan solusi $n = 1$, yaitu

$$\phi(r,\theta) = \frac{\varrho_5}{r}\sin\theta + \varrho_6 r\sin\theta + \varrho_7 r^3\sin\theta + \varrho_8\ r\ln r\sin\theta + \rho_9 r\theta\cos\theta.$$

Akhirnya solusi umum Michell untuk persamaan biharmonik yaitu,

$$\boldsymbol{\phi} = A_{01}r^2 + A_{02}r^2 \ln r + A_{03} \ln r + A_{04}\theta$$

$$+ \left(A_{11}r^3 + A_{12}r \ln r + \frac{A_{14}}{r}\right) \cos\theta + \mathrm{A}_{13}r\theta \sin\theta$$

$$+ \left(B_{11}r^3 + B_{12}r \ln r + \frac{B_{14}}{r}\right) \sin\theta + B_{13}r\theta \cos\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (A_{n1}r^{n+2} + A_{n2}r^{-n+2} + A_{n3}r^n + A_{n4}r^{-n}) \cos n\theta$$

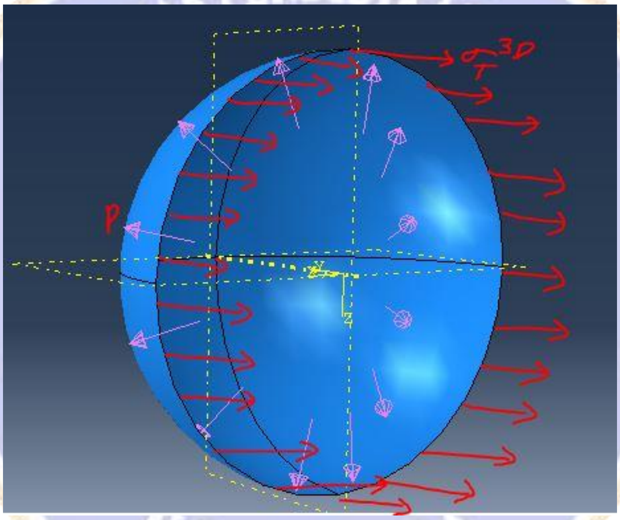
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (B_{n1}r^{n+2} + B_{n2}r^{-n+2} + B_{n3}r^n + B_{n4}r^{-n}) \sin n\theta \ .$$

Lampiran F. Tekanan dalam kasus kulit bola.

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan tekanan dalam kasus kulit bola. Pada balon, seperti yang ditunjukkan pada Gambar F, terdapat suatu tekanan internal pada balon. Untuk mendapatkan persamaan mngenai keterkaitan antara tekanan internal dan tensor tegangan komponen lateral pada balon, langkah pertama ialah dengan menggunakan hukum 1 Newton , yaitu

$$\Sigma F = 0$$

(a)



(b)

Gambar F. (a) Balon (b) skematis tekanan internal dan tegangan lateral pada balon (Gambar dibuat dengan menggunakan program ABAQUS).

dengan,

$$\Sigma F = 0$$

$$\pi R^2 p - 2\pi R h \sigma_T = 0$$

$$\sigma_T = \frac{pR}{2h}. \tag{F.1}$$

Untuk kasus kulit yang dipengaruhi suatu tekanan eksternal sama halnya dengan kasus balon akan tetapi dengan adanya suatu pengaruh yaitu aksi dari tekanan eksternal, sehingga menghasilkan suatu reaksi yaitu tegangan lateral pada kulit, sehingga persamaan untuk kasus ini sama dengan kasus balon dengan tensor tegangan komponen lateral, yaitu

$$\sigma_T = -\frac{pR}{2h},$$

dengan tanda negatif yang hanya mengindikasikan bahwa kulit terkompres. Untuk persamaan tekanan dalam persamaan tensor tegangan komponen θ dan ϕ, yaitu

$$p = \frac{h}{R}(2\sigma_T) = \frac{h}{R}\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi}\right)$$

$$p = \frac{h}{R}\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi}\right).$$

Lampiran G. Kalkulasi Tekanan Tensor.

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan dan solusi persamaan tekanan tensor. Fungsi partisi pada kapsid dan lipid pada virus,yaitu

$$Q(N, V, T) = \frac{1}{\Lambda^{3N} N!} \int dr_1 \int dr_2 \int dr_N e^{-\beta u(r_i)},$$

dengan $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Kemudian dengan menggunakan pernyataan tekanan pada termodinamika,yaitu

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right) = k_B T\left(\frac{\partial}{\partial V}\ln Q\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\ln Q = \frac{1}{Q}\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial Q}{\partial R},$$

dengan

$$\vec{r}_i = R\,\vec{t}_i$$

sehingga fungsi partisinya menjadi,

$$Q(N,V,T) = \frac{R^{3N}}{\Lambda^{3N}N!}\int dt_1\int dt_2\int dt_N e^{-\beta u(Rt_i)}.$$

R^{3N} karena tiga merupakan derajat kebebasan pada bola, yang mana jangkauan komponen pada -1, dan 1, sama halnya pada permasalahan kubus 3 derajat kebebasan dengan jangkauan atau panjang komponen antara 0, dan 1.

Tahap selanjutnya melakukan diferensial fungsi partisi terhadap radius cangkang, yaitu

$$\frac{\partial Q}{\partial R} = \frac{3NR^{3N-1}}{\Lambda^{3N}}\frac{1}{N!}\int dt_1\int dt_2\int dt_N e^{-\beta u(Rt_i)}$$
$$-\left(\frac{R}{\Lambda}\right)^{3N}\frac{1}{N!}\int dt_1\int dt_2\int dt_N\beta\frac{\partial u}{\partial R}e^{-\beta u(Rt_i)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial R} = \frac{3NQ}{R} - \beta\frac{\partial u}{\partial R}Q,$$

dengan mengaitkan radius cangkang dengan volume cangkang didapatkan suatu pernyataan, yaitu

$$\frac{\partial}{\partial V}\ln Q = \frac{1}{Q}\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial Q}{\partial R} = \frac{1}{Q}\frac{1}{4\pi R^2}\left(\frac{3NQ}{R} - \beta\frac{\partial u}{\partial R}Q\right)$$

$$= \frac{3N}{4\pi R^3} - \frac{\beta}{4\pi R^2}\frac{\partial u}{\partial R}$$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial V} = \frac{N}{V} - \frac{\beta R}{3V}\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right),$$

dengan $u(r_i) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V(r_{ij})$

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial R}\right),$$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial V} = \frac{N}{V} - \frac{\beta R}{3V}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial R}\right)\right]$$

$$p = \frac{Nk_BT}{V} - \frac{1}{3V}\left[R\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial R}\right)\right],$$

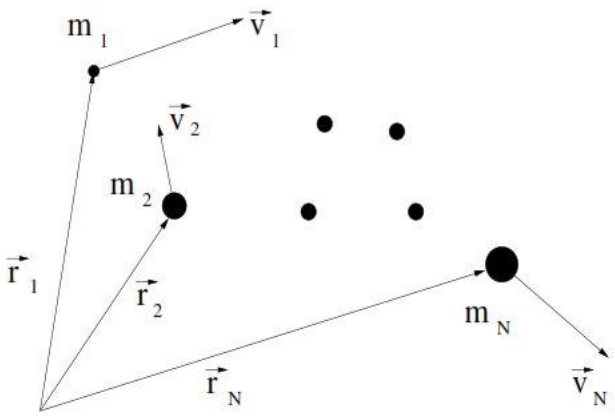
persamaan ini disebut sebagai persamaan virial untuk tekanan, dan tentunya untuk mencari persamaan $\frac{\partial r_{ij}}{\partial R}$ dapat mengaitkan dengan teorema virial.

Lampiran H. Teorema Virial

Pada lampiran ini dibahas mengenai teorema virial. Misalkan terdapat sebuah sistem partikel dalam gerak stasioner, maksud gerak stasioner yaitu partikel dibuat untuk bergerak dalam wilayah terbatas pada sebuah ruang dan kecepatannya hanya berubah dengan batasan tertentu tanpa arah tertentu (Clausius, 2003). Dengan $F_x \, , F_y \, dan \; F_z$ merupakan komponen gaya yang bertindak pada partikel pada posisi $x, y \, dan \, z$ dalam ruang dan bentuk persamaannya adalah

$$-\frac{1}{2}\sum\left(F_x x + F_y y + F_z z\right), \tag{H.1}$$

nilai rata-rata dari kuantitas pers. (H.1) disebut sebagai *virial* dari sistem, kemudian energi kinetik rata-rata dari sistem sama dengan virial sistem. Tinjau sebuah sistem dari N partikel dengan massa m_j , vektor posisi $\vec{r}_j$, vektor kecepatan $\vec{v}_j$ dan momentum $\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j$ yang ditunjukkan seperti pada Gambar H.1.



Gambar H.1. Sistem N-partikel.

Untuk momen inersia total dari sistem adalah

$$I = \sum_j m_j \left|\vec{r}_j\right|^2 = \sum_j m_j \ \vec{r}_j \cdot \vec{r}_j \ , \tag{H.2}$$

turunan momen inersia terhadap waktu disebut sebagai virial, yang dinyatakan dengan,

$$G = \frac{1}{2}\frac{dI}{dt} = \sum_j \vec{p}_j \cdot \vec{r}_j \ ,$$

kemudian dengan melakukan turunan terhadap waktu pada persamaan virial,

$$\frac{dG}{dt} = \sum_j \frac{d\vec{p}_j}{dt} \cdot \vec{r}_j + \sum_j \vec{p}_j \cdot \frac{d\vec{r}_j}{dt}$$

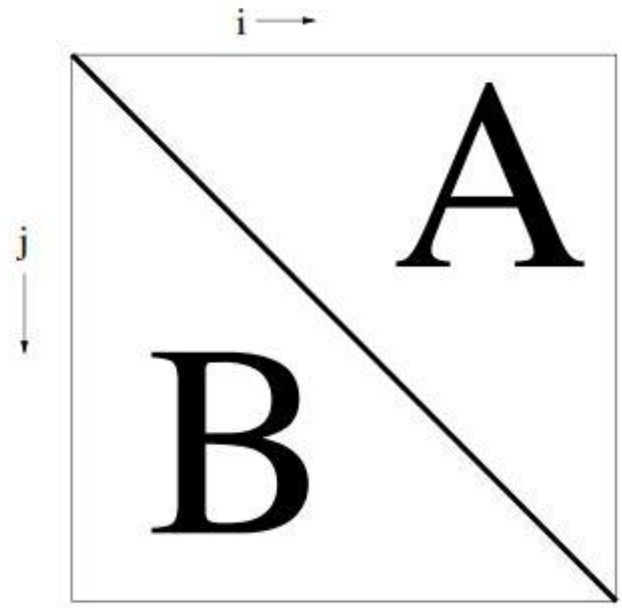
$$\frac{dG}{dt} = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j + \sum_j \vec{p}_j \cdot \vec{v}_j$$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j + 2T, \tag{H.3}$$

dengan

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j = \sum_j \sum_i \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \tag{H.4}$$

Pada pers. (H.4) $\vec{F}_j$ merupakan gaya yang bertindak pada partikel j dan $\vec{F}_{ij}$ merupakan gaya interatom antara partikel i dan partikel j. Pernyataan sigma i merupakan jumlah seluruh partikel i, kecuali partikel $i = j$, dan pernyataan sigma i dan j menyatakan jumlah seluruh kombinasi dua pertikel i dan j , kecuali $i = j$. Sehingga dari kedua pernyataan tersebut dapat dilihat sebagai sebuah matriks $N \times N$ dengan jumlah seluruh elemen ij dalam matriks, kecuali diagonal elemen jj atau ii. Cara membuktikan pers. (H.4) adalah dengan membagi penjumlahan menjadi dua bagian dengan diagonal seperti yang ditunjukkan Gambar H.2, yaitu



Gambar H.2. Visualisasi matriks penjumlahan.

Sehingga pers. (H.4) menjadi

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j = \sum_j \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_j \; (untuk\ bagian\ B) + \sum_j \sum_{i>j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_j (untuk\ bagian\ A), \qquad \text{(H.5)}$$

dengan menggunakan hukum 3 Newton (Symon, 1960),

$$\sum_j \sum_{i>j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_j = -\sum_j \sum_{i>j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j, \qquad \text{(H.6)}$$

substitusikan pers. (H.6) ke pers. (H.5), sehingan didapatkan

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j = \sum_j \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_j - \sum_j \sum_{i>j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j \,. \tag{H.7}$$

Tinjau pers. (H.7) pada bagian kedua, yaitu

$$\sum_j \sum_{i>j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j = \sum_j \sum_{j<i} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j$$

$$= \vec{F}_{12} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{13} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{14} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{15} \cdot \vec{r}_1 + \cdots + \vec{F}_{1N} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{23} \cdot \vec{r}_2 + \vec{F}_{24} \cdot \vec{r}_2 + \vec{F}_{25} \cdot \vec{r}_2 + \cdots + \vec{F}_{2N} \cdot \vec{r}_2 + \vec{F}_{34} \cdot \vec{r}_3 + \cdots + \vec{F}_{3N} \cdot \vec{r}_3 + \cdots + \vec{F}_{N-1\,N} \cdot \vec{r}_{N-1}$$

$$= \vec{F}_{12} \cdot \vec{r}_1 + \left(\vec{F}_{13} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{23} \cdot \vec{r}_2\right) + \left(\vec{F}_{14} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{24} \cdot \vec{r}_2 + \vec{F}_{34} \cdot \vec{r}_3\right) + \cdots + \left(\vec{F}_{1N} \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_{2N} \cdot \vec{r}_2 + \vec{F}_{3N} \cdot \vec{r}_3 + \cdots + \vec{F}_{N-1\,N} \cdot \vec{r}_{N-1}\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{N} \sum_{t>l} \vec{F}_{l\,t} \cdot \vec{r}_l = \sum_{j=1}^{N} \sum_{j>i} \vec{F}_{i\,j} \cdot \vec{r}_i,$$

sehingga didapatkan, bahwa

$$\sum_j \sum_{i>j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j = \sum_j \sum_{j>i} \vec{F}_{i\,j} \cdot \vec{r}_i = \sum_j \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i$$

$$\sum_j \sum_{i>j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j = \sum_j \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i, \tag{H.8}$$

dengan mensubstitusikan pers. (H.8) ke pers. (H.7), maka didapatkan

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j = \sum_j \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_j - \sum_j \sum_{i>j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j$$

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j = \sum_j \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_j - \sum_j \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \qquad \text{(H.9)}$$

Kemudian mengkalkulasikan waktu rata-rata dari setiap kuantitas sepanjang waktu τ dan waktu rata-rata dari kuantitas G, yaitu

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dG}{dt}\, dt = \frac{1}{\tau} \int_{G(0)}^{G(\tau)} dG = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau}.$$

Untuk kondisi seimbang (*the equilibrium condition*) $\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = 0$, dengan waktu rata-rata diasumsikan dengan limit $\tau \to \infty$, maka

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = 2\langle T \rangle + \left\langle \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j \right\rangle$$

$$0 = 2\langle T \rangle + \left\langle \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j \right\rangle$$

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{r}_j \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right\rangle,$$

sehingga didapatkan sebuah persamaan mengenai virial (Clausius, 2003), yaitu

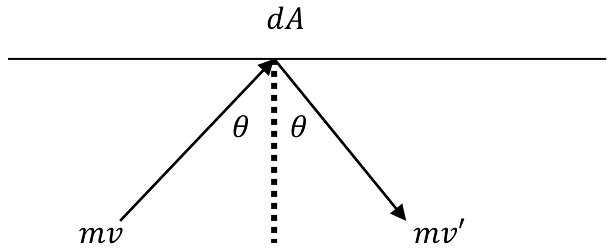
$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right\rangle.$$

Teorema yang dinyatakan Clausius merupakan suatu teorema yang menyatakan bahwa dalam gerak stasioner energi kinetik rata-rata dari sistem sama dengan rata-rata virial. Gerakan tata surya memenuhi kondisi ini dan begitu pula dengan gerak molekul gas yang berada dalam sebuah wadah atau kontainer (Maxwell 1874). Energi kinetik partikel yaitu setengah hasil kali massa dan kecepatan kuadrat, dan energi kinetik sistem merupakan jumlah energi kinetik dari bagian tersebut. Ketika adanya sebuah tarikan atau tolakan diantara dua partikel, setengah hasil kali tegangan tersebut terhadap jarak antara dua partikel disebut sebagai tegangan virial. Tegangan virial dihitung positif ketika tegangan merupakan sebuah tarikan, dan negatif ketika merupakan sebuah tolakan. Sistem virial merupakan jumlah dari tegangan virial yang ada dalam sistem. Jika sistem disubjekkan terhadap tegangan eksternal dari tekanan sisi wadah (kontainer) yang mana sistem berada, banyaknya virial karena tegangan eksternal tersebut ialah sepertiga hasil kali tekanan terhadap volume wadah, dan virial karena tegangan eksternal mesti ditambahkan dengan pernyataan tersebut (Maxwell, 1874).

Untuk mencari keterkaitan antara tekanan dan energi kinetik rata-rata pada persamaan virial yaitu dengan meninjau sebuah partikel menumbuk sebuah permukaan. Komponen normal perubahan momentum partikel, yaitu

$$mv\cos\theta - (-mv\cos\theta) = 2mv\cos\theta, \qquad \text{(H.10)}$$

untuk skematisnya ditunjukkan pada Gambar H.3.

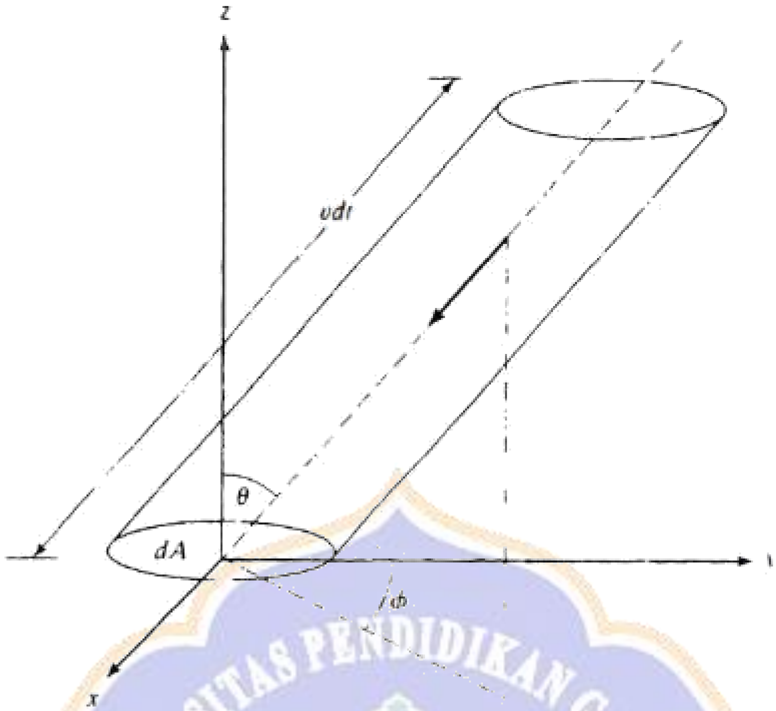


Gambar H.3. Perubahan momentum dari sebuah molekul yang menghantam elemen permukann dA (gambar dibuat dengan menggunakan Microsoft Office Word).

Perubahan momentum dP didapatkan dari partikel dengan kelajuan v sampai $v + dv$ yang melaju terhadap sebuah permukaan dA dalam waktu dt, yaitu

$$dP = \int 2\, mv \cos\theta \; dN. \tag{H.11}$$

Untuk menentukan dN anggap sebuah silinder miring dengan ketinggian vdt pada sudut θ yang diukur sesuai dengan area dasar normal dA seperti yang ditunjukkan pada Gambar H.4, yang mana dengan tujuan menentukan suatu persamaan dari dN yang menyatakan banyaknya partikel yang menghantam area dA dalam waktu dt.

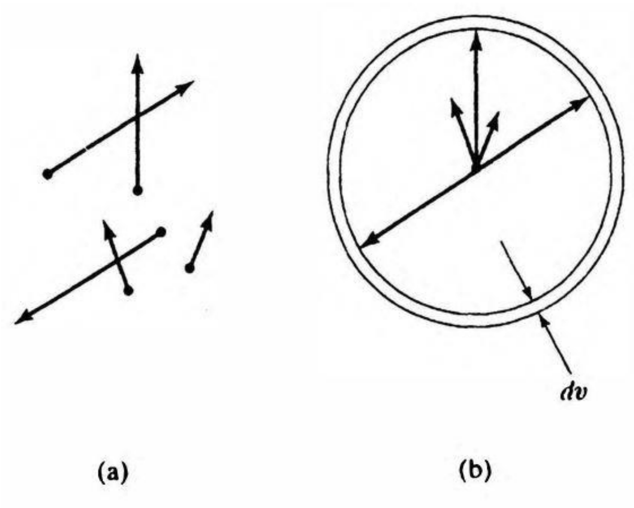


Gambar H.4. Geometri silinder miring digunakan untuk mengkalkulasikan banyaknya molekul yang menghantam area dA pada waktu dt (Sumber : Carter, A, 2001).

Banyaknya partikel dengan kelajuan v sampai $v + dv$ dalam silinder miring adalah

$$(nf(v)dv)(v\cos\theta\, dA\, dt), \tag{H.12}$$

dengan volume silinder ialah $v\cos\theta\, dA\, dt$. Kecepatan setiap partikel di tunjukkan dengan vektor dan semua vektor kecepatan bergerak parallel terhadap asal yang sama, seperti yang ditunjukkan pada Gambar H.5.



Gambar H.5 (a) Kecepatan molekul berorientasi secara acak, dan (b) vektor yang sama mengacu pada asal yang sama (Sumber : Carter, A, 2001).

Asumsikan lima keadaan pada Gambar H.5 yang disebut sebagai *the head end* terdistribusi secara homogen dalam kulit bola dengan radius v dan ketebalan dv seperti yang ditunjukkan pada Gambar H.5 bagian (b), dengan elemen area permukaan bola, yaitu

$$da = v^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi, \tag{H.13}$$

dengan

$$\int da = 4\pi \, v^2,$$

sehingga fraksi dari jumlah total partikel dengan distribusi angular θ sampai $\theta + d\theta$ dan ϕ sampai $\phi + d\phi$, yaitu

$$\frac{da}{\int da} = \frac{\sin\theta \, d\theta \, d\phi}{4\pi},$$

banyaknya molekul dalam silinder miring pada waktu t bergerak dengan kelajuan v sampai $v + dv$ terhadap dA, yaitu

$$dN = nvf(v)dv\cos\theta\, dA\, dt\,\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{4\pi}, \qquad \text{(H.14)}$$

sehingga persamaan dN yang telah didapatkan, disubstitusikan terhadap persamaan perubahan momentum, yaitu

$$dP = \int\int\int 2\, mv\cos\theta\;\, nv\, f(v)dv\cos\theta\, dA\, dt\,\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{4\pi}$$

$$= \frac{nm\, dA\, dt}{2\pi}\int_0^\infty v^2\, f(v)dv\,\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\;\, d\theta\,\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle\, dA\, dt.$$

Dari hukum 2 Newton, dan dengan definisi mengenai tekanan, didapatkan bahwa

$$p = \frac{dP}{dA\, dt} = \frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle$$

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\; 2\,\langle T\rangle$$

$$\frac{3}{2}pV = N\langle T\rangle, \qquad \text{(H.15)}$$

dengan $N = 1$ untuk 1 partikel, sehingga persamaan clausius mengenai virial mesti ditambahkan dengan persamaan $\frac{3}{2}pV$, sehingga didapatkan

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle\sum_{i,j}\vec{F}_{ij}\cdot\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)\right\rangle + \left(\frac{3}{2}\, pV\right)$$

$$\frac{3}{2}pV = \langle T \rangle + \frac{1}{2}\left\langle \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right\rangle$$

$$3pV = 2\langle T \rangle + \left\langle \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right\rangle$$

$$p = \frac{1}{3V}\left[2\langle T \rangle + \left\langle \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right\rangle \right], \quad \text{(H.16)}$$

dan untuk persamaan tegangan, yaitu

$$\sigma = \frac{1}{V}\left(2\langle T \rangle + \left\langle \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right\rangle \right).$$

Persamaan keterkaitan antara gaya dan energi potensial adalah

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla u(r_i) = -\frac{\partial u(r_i)}{\partial r_{ij}} \widehat{r_{ij}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \widehat{r_{ij}},$$

untuk energi potensial total dinyatakan sebagai jumlah dari interaksi 2 partikel, yaitu

$$u(r_i) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V(r_{ij}),$$

dan dengan

$$\widehat{r_{ij}} = \frac{\overrightarrow{r_{ij}}}{r_{ij}} = \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}},$$

sehingga,

$$\sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \left(\frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}} \right) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i),$$

dengan

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{3V} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \frac{|r_j - r_i|^2}{r_{ij}} \right]$$

dan

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{3V} \left[R \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial R} \right) \right],$$

sehingga disini didapatkan untuk pernyataan,

$$R \frac{\partial r_{ij}}{\partial R} = \frac{|r_j - r_i|^2}{r_{ij}} = \frac{(\overrightarrow{r_{ij}} \cdot \hat{e}_\alpha)(\overrightarrow{r_{ij}} \cdot \hat{e}_\beta)}{r_{ij}}. \quad \text{(H.17)}$$

Lampiran I. Tekanan dalam variasi kontainer pada sistem setimbang

Pada lamppiran ini dibahas mengenai persamaan tekanan dalam variasi kontainer pada sistem setimbang, yaitu mengaitkan virial dengan tekanan eksternal pada sistem setimbang dengan permukaan elemen (ΔS) dan gaya yang diberikan pada permukaan elemen ($\sum_{i \in \Delta S} F_i^s$). Tekanan eksternal ($p^e$) pada elemen permukaan ialah,

$$p^e \Delta S = \sum_{i \in \Delta S} F_i^s = -\sum_{i \in \Delta S} \langle \overrightarrow{F_i^s} \cdot \widehat{n_\iota} \rangle, \tag{I.1}$$

dan virial eksternal dinyatakan sebagai

$$\sum_{i \in \Delta S} \langle \vec{F}_i^s \cdot \vec{r}_i \rangle = \left\langle \vec{r} \cdot \sum_{i \in \Delta S} \vec{F}_i^s \right\rangle, \tag{I.2}$$

karena permukaan elemen kecil, vektor $\vec{r_i}$ yang esensial terhadap semua partikel yang berinteraksi pada ΔS, dapat diganti dengan vektor $\vec{r}$ terhadap elemen tersebut, dan perlakuan yang sama pula serupa dengan $\widehat{n_\iota} = \hat{n}$, dengan $\hat{n}$ merupakan unit normal lokal pada permukaan (ΔS), dengan

$$\vec{r} \cdot \sum_{i \in \Delta S} \vec{F}_i^s = -\vec{r} \cdot \hat{n} \sum_{i \in \Delta S} F_i^s = -p^e \vec{r} \cdot \Delta \vec{S}, \tag{I.3}$$

dengan $\Delta \vec{S} = \Delta S \hat{n}$. Untuk integrasi pada seluruh permukaan adalah

$$-\oint p^e \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{i \in \Delta S} \langle \vec{F}_i^s \cdot \vec{r}_i \rangle, \tag{I.4}$$

dengan menggunkana teorema Gauss, yaitu

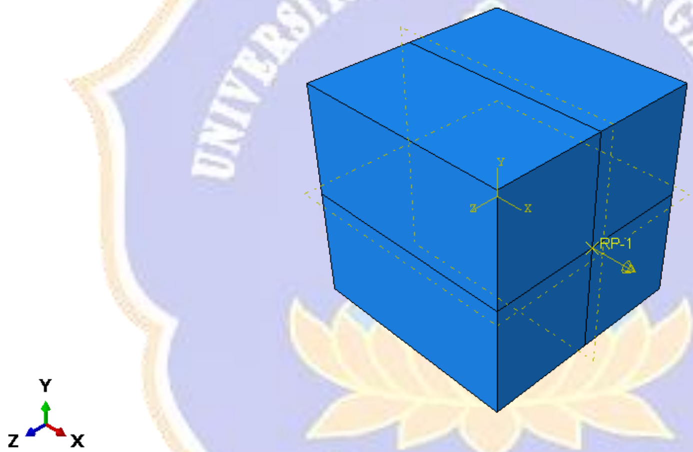
$$\oint p^e \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \nabla \cdot (p^e \vec{r}) d^3 r = 3 p^e V, \tag{I.5}$$

tekanan bersifat homogen, karenanya

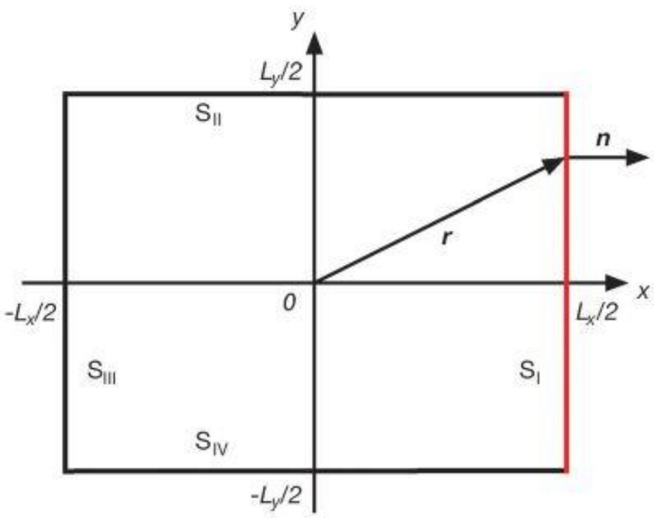
$$3p^e V = -\sum_{i \in \Delta S} \langle \vec{F}_i^s \cdot \vec{r}_i \rangle$$

$$p^e = -\frac{1}{3V} \sum_{i \in \Delta S} \langle \vec{F}_i^s \cdot \vec{r}_i \rangle. \tag{I.6}$$

Untuk *cuboidal confinement* dengan unit normal lokal $\hat{n} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z},$ dan untuk model ditunjukkan pada Gambar I.1, yaitu



(a)



(b)

Gambar I.1. (a) *cuboidal confinement* (Gambar dibuat dengan menggunakan program ABAQUS), (b) luas penampang *cuboidal confinement* (Sumber : Winkler, dkk, 2015).

dengan

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = \frac{L_x}{2},$$

dan dengan $\vec{r} = \frac{L_x}{2}\,\hat{n}$, maka tekanan pada permukaan I yang ditunjukkan pada Gambar I.1 adalah

$$p_I = \frac{1}{S_I}\sum_i \langle F_i^s \rangle$$

$$p_I = -\frac{1}{S_I}\sum_{i\in\Delta S} \langle \overrightarrow{F_i^s} \cdot \hat{n} \rangle = -\frac{2}{S_I L_x}\sum_{i\in\Delta S} \langle \vec{F}_i^s \cdot \vec{r} \rangle$$

$$p^e = -\frac{1}{3V}\sum_{i\in\Delta S} \langle \vec{F}_i^s \cdot \vec{r}_i \rangle,$$

dengan tensor tegangan pada *cubodial confinement*, yaitu

$$\sigma_{total} = -\frac{1}{V}\sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{1}{r_{ij}}\left(\left(\vec{r}_{ij}\cdot\hat{x}\right)^2 + \left(\vec{r}_{ij}\cdot\hat{y}\right)^2 + \left(\vec{r}_{ij}\cdot\hat{z}\right)^2\right). \tag{I.7}$$

Untuk *spherical confinement* dengan lokal normal $\hat{n} = \hat{r} + \hat{\theta} + \hat{\phi}$, dengan radius permukaan bola yaitu *R* dengan kerangka acuan terletak pada pusat permukaan bola seperti yang ditunjukkan pada Gambar I.2.

Gambar I.2. *Spherical confinement* (Gambar dibuat dengan menggunakan program ABAQUS).

Menentukan tekanan pada kasus *spherical confinement* sama halnya dengan mencari tekanan pada kubus, akan tetapi yang membedakan ialah lokal normal ($\hat{n}$) yang dimiliki masing-masing wadah, yaitu

untuk kubus dengan $\hat{n} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$

untuk silinder dengan $\hat{n} = \hat{r} + \hat{\phi} + \hat{z}$

untuk bola dengan $\hat{n} = \hat{r} + \hat{\phi} + \hat{\theta}$.

Kemudian berdasar pada persamaan tekanan (15),

$$p^e S = \sum_{i \in \Delta S} F_i^s$$

$$p^e = \frac{1}{S} \sum_{i \in \Delta S} F_i^s = -\frac{1}{S} \sum_{i \in \Delta S} \langle \overrightarrow{F_i^s} \cdot \hat{n} \rangle, \tag{I.8}$$

dengan $S = 4\pi R^2$ dan untuk setiap partikel pada permukaan dengan $\vec{r} = R\hat{n}$, karenanya

$$p^e = -\frac{1}{SR} \sum_{i \in \Delta S} \langle \overrightarrow{F_i^s} \cdot \vec{r} \rangle,$$

dengan $SR = 4\pi R^3 = 3V$, sehingga didapatkan suatu persamaan,

$$p^e = -\frac{1}{3V} \sum_{i \in \Delta S} \langle \overrightarrow{F_i^s} \cdot \vec{r} \rangle, \tag{I.9}$$

dengan tensor tegangan untuk setiap komponen pada kontainer bola, yaitu

$$\sigma = \frac{1}{V} \sum_i \overrightarrow{F_i} \cdot \vec{r}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{V} \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} \frac{1}{r_{ij}} \left(\overrightarrow{r_{ij}^{\alpha}} \cdot \overrightarrow{r_{ij}^{\beta}} \right), \tag{I.10}$$

dengan $\hat{n} = \hat{r} + \hat{\phi} + \hat{\theta}$, maka

$$\left(\overrightarrow{r_{ij}} \cdot \overrightarrow{r_{ij}} \right) = \left| \overrightarrow{r_{ij}} \right|^2 = \left(\vec{r}_{ij} \cdot \hat{r} \right)^2 + \left(\vec{r}_{ij} \cdot \hat{\theta} \right)^2 + \left(\vec{r}_{ij} \cdot \hat{\phi} \right)^2,$$

sehingga didapatkan,

$$\sigma_{total} = -\frac{1}{V}\sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{1}{r_{ij}}\left((\vec{r}_{ij}\cdot\hat{r})^2 + (\vec{r}_{ij}\cdot\hat{\theta})^2 + (\vec{r}_{ij}\cdot\hat{\phi})^2\right). \quad \text{(I.11)}$$

Untuk tensor tegangan *cylindrical confinement* dengan unit normal lokal $\hat{n} = \hat{r} + \hat{\phi} + \hat{z}$, yaitu

$$\sigma_{total} = -\frac{1}{V}\sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{1}{r_{ij}}\left((\vec{r}_{ij}\cdot\hat{r})^2 + (\vec{r}_{ij}\cdot\hat{z})^2 + (\vec{r}_{ij}\cdot\hat{\phi})^2\right). \quad \text{(I.12)}$$

Lampiran J. Tensor tegangan 2D dan 3D

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan tensor tegangan dua dimensi dan tiga dimensi. Kalkulasi turunan pada jarak antar partikel terhadap radius permukaan bola R adalah

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial R} = \frac{1}{R}\frac{|r_j - r_i|^2}{r_{ij}} = \frac{1}{R}\frac{(\overrightarrow{r_{ij}}\cdot\hat{e}_\alpha)(\overrightarrow{r_{ij}}\cdot\hat{e}_\beta)}{r_{ij}}, \quad \text{(J.1)}$$

sehingga didapatkan

$$p = k_B T\left(\frac{N}{V} - \frac{1}{3Vk_BT}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}}\frac{(r_{ij}\cdot\hat{e}_\alpha)(r_{ij}\cdot\hat{e}_\beta)}{r_{ij}}\right)\right), \quad \text{(J.2)}$$

dan dengan tensor tegangan, yaitu

$$\sigma_{\alpha\beta}^{3D} = \frac{Nk_BT}{V} - \frac{1}{V}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{(r_{ij}\cdot\hat{e}_\alpha)(r_{ij}\cdot\hat{e}_\beta)}{r_{ij}}\right)$$

Sehingga komponen tensor tegangan pada koordinat permukaan bola, yaitu

$$\sigma_{\theta\theta}^{3D} = \frac{Nk_BT}{V} - \frac{1}{V}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta\right)^2}{r_{ij}}\right)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{3D} = \frac{Nk_BT}{V} - \frac{1}{V}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi\right)^2}{r_{ij}}\right)$$

$$\sigma_{rr}^{3D} = \frac{Nk_BT}{V} - \frac{1}{V}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_r\right)^2}{r_{ij}}\right),$$

dan jumlah dari ketiga komponen adalah

$$\sigma_{\theta\theta}^{3D} + \sigma_{\phi\phi}^{3D} + \sigma_{rr}^{3D} = \frac{3Nk_BT}{V} - \frac{1}{V}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}}\frac{\left(\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta\right)^2 + \left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi\right)^2 + \left(r_{ij}\cdot\hat{e}_r\right)^2\right)}{r_{ij}}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{3D} + \sigma_{\phi\phi}^{3D} + \sigma_{rr}^{3D} = 3\left\{\frac{Nk_BT}{V} - \frac{1}{3V}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial V(r_{ij})}{\partial r_{ij}}\frac{\left(\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta\right)^2 + \left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi\right)^2 + \left(r_{ij}\cdot\hat{e}_r\right)^2\right)}{r_{ij}}\right)\right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{3D} + \sigma_{\phi\phi}^{3D} + \sigma_{rr}^{3D} = 3p,$$

maka didapatkan suatu relasi yaitu

$$p = \frac{1}{3}\left(\sigma_{\theta\theta}^{3D} + \sigma_{\phi\phi}^{3D} + \sigma_{rr}^{3D}\right),$$

secara umum persamaan tensor tegangan virial adalah

$$\Omega^d\sigma_{\alpha\beta}^d = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\alpha\right)\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\beta\right)}{r_{ij}},$$

dan komponen lateral pada permukaan bola, yaitu

$$\sigma_{\theta\theta}^{3D} = -\frac{3}{4\pi R^3}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta\right)^2}{r_{ij}} \tag{J.3}$$

dan

$$\sigma_{\phi\phi}^{3D} = -\frac{3}{4\pi R^3}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV\left(r_{ij}\right)}{dr_{ij}}\frac{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi\right)^2}{r_{ij}}. \tag{J.4}$$

Jumlah kedua tensor tegangan pada pers. (J.3) dan (J.4), yaitu

$$\sigma_{\theta\theta}^{3D} + \sigma_{\phi\phi}^{3D} = -\frac{3}{4\pi R^3}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left\{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta\right)^2 + \left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi\right)^2\right\}}{r_{ij}}$$

$$2\sigma_{T}^{3D} = -\frac{3}{4\pi R^3}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left\{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta\right)^2 + \left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi\right)^2\right\}}{r_{ij}}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{3D} + \sigma_{\phi\phi}^{3D} = 2\sigma_{T}^{3D}.$$

Untuk komponen tensor tegangan virial lateral 2D, yaitu

$$\sigma_{\theta\theta}^{2D} = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta\right)^2}{r_{ij}}$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{2D} = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV\left(r_{ij}\right)}{dr_{ij}}\frac{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi\right)^2}{r_{ij}},$$

dan jumlah kedua tensor tegangan ini, yaitu

$$\sigma_{\theta\theta}^{2D} + \sigma_{\phi\phi}^{2D} = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left\{\left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta\right)^2 + \left(r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi\right)^2\right\}}{r_{ij}}$$

$$2\sigma_T^{2D} = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{\left\{(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta)^2 + (r_{ij}\cdot\hat{e}_\phi)^2\right\}}{r_{ij}},$$

sehingga didapatkan relasi,

$$\sigma_{\theta\theta}^{2D} + \sigma_{\phi\phi}^{2D} = 2\sigma_T^{2D}.$$

Kemudian mensubstitusikan relasi ini terhadap persamaan tekanan radial, sehingga didapatkan

$$p = \frac{2}{R}\sigma_T^{2D} + \frac{1}{3}\sigma_{rr}^{3D},$$

dengan mengabaikan pernyataan tegangan komponen radial, pernyataan ini menjadi suatu relasi Young dan Laplace (Zandi dan Reguera, 2005), yaitu

$$p = \frac{2}{R}\sigma_T^{2D},$$

dengan $\sigma_{\theta\theta}^{2D} = \sigma_\phi^{2D}$, maka $2\sigma_T^{2D} = \sigma_\theta^{2D} + \sigma_\phi^{2D} = 2\sigma_\theta^{2D}$, sehingga $\sigma_T^{2D} = \sigma_\theta^{2D}$, dan dengan keterkaitan antara 2D tensor tegangan dan 3D tensor tegangan komponen tangensial θ, yaitu

$$\Omega^d\sigma_{\alpha\beta}^d = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{(r_{ij}\cdot\hat{e}_\alpha)(r_{ij}\cdot\hat{e}_\beta)}{r_{ij}}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{2D} = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta)^2}{r_{ij}}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{3D} = -\frac{3}{4\pi R^3}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}\frac{(r_{ij}\cdot\hat{e}_\theta)^2}{r_{ij}}$$

$$\sigma_{\theta}^{3D} = \frac{3}{R}\sigma_{\theta}^{2D}.$$

Lampiran K. Kalkulasi konstanta elastisitas cangkang virus dengan tensor tegangan solusi Michell

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan konstanta elastisitas cangkang virus dengan tensor tegangan selesaian Michell. Tensor tegangan komponen tangensial pada solusi Michell yaitu (tanpa pernyataan logaritma),

$$\sigma_{\theta\theta}^{2D} = \sigma_{T}^{2D} = -\frac{A}{R^2} + B$$

$$\frac{2}{R}\sigma_{T}^{2D} = \frac{h}{R}\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi}\right).$$

Komponen *non-zero* dari stress tensor, yaitu

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{\alpha\beta}(1-\nu) + \nu\delta_{\alpha\beta}e_{\gamma\gamma}\right),$$

dengan $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$ maka $e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi}$ sehingga nilai tensor tegangan komponen θ didapatkan,

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{\theta\theta}(1-\nu) + \nu(e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi})\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{\theta\theta} + \nu e_{\phi\phi})\right) = \frac{E}{(1-\nu^2)}(1+\nu)e_{\theta\theta}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu)(1+\nu)}(1+\nu)e_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu)}e_{\theta\theta}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu)} \frac{\delta R}{R},$$

dengan

$$e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} = \frac{\delta R}{R},$$

maka nilai tekanan radial eksternal, yaitu

$$p = \frac{2E}{(1-\nu)} \frac{h}{R^2}\ \delta R.$$

Kemudian dengan mensubtitusikan dengan pernyataan yang telah didapatkan, yaitu

$$\frac{2}{R}\sigma_T^{2D} = \frac{h}{R}\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi}\right)$$

$$\frac{2}{R}\left(-\frac{A}{R^2} + B\right) = \frac{2E}{(1-\nu)} \frac{h}{R^2}\ \delta R$$

$$\left(-\frac{A}{R^2} + \frac{BR^2}{R^2}\right) = \frac{E}{(1-\nu)} \frac{h}{R}\ \delta R$$

$$\frac{-A + BR^2}{R} = \frac{E}{(1-\nu)}\ h\ \delta R,$$

kemudian menentukan nilai konstanta A, dan B dengan kondisi batas $\sigma_{rr}(R_2) = -\sigma$, dan $\sigma_{rr}(R_1) = 0$, yang mana σ merupakan konstanta load/beban eksternal.

Nilai konstanta A dan B, yaitu

$$A = \frac{R_1^2 R_2^2}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\ \sigma \text{ dan } B = -\frac{R_2^2}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\ \sigma.$$

Dengan nilai A dan B disubstitusikan ke persamaan $\frac{-A+BR^2}{R} = \frac{E}{(1-\nu)}\ h\ \delta R$, sehingga didapatkan suatu persamaan, yaitu

$$-\frac{\sigma}{R}\frac{R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)}(R_1^2 + R^2) = \frac{E}{(1-\nu)}\ h\ \delta R$$

$$\sigma = -\frac{Eh}{(1-\nu)}\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{(R_1^2 + R^2)}\frac{R}{R_2^2}\ \delta R. \qquad \text{(K.1)}$$

Saat terjadi tekukan pada kapsid atau lipid virus, nilai konstanta beban (*load)*, yaitu

$$\sigma = \frac{F}{2r} = \frac{F}{2R\sin\alpha} \approx \frac{F}{2R\alpha}, \qquad \text{(K.2)}$$

dengan mensubstitusikan pers. (K.2) ke pers. (K.1), didapatkan

$$\frac{F}{2\alpha R} = -\frac{Eh}{(1-\nu)}\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{(R_1^2 + R^2)}\frac{R}{R_2^2}\ \delta R$$

$$\frac{F}{\delta R} = -\frac{2\alpha Eh}{(1-\nu)}\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{(R_1^2 + R^2)}\frac{R^2}{R_2^2}.$$

Untuk model *thin shell* nilai $R \approx R_1$ karena nilai $h \ll R_1$, maka

$$\frac{F}{\delta R} = -\frac{2\alpha Eh}{(1-\nu)}\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{(R_1^2 + R_1^2)}\frac{R_1^2}{R_2^2}$$

$$\frac{F}{\delta R} = -\frac{\alpha Eh}{(1-\nu)}\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2},$$

dengan $R_2 = R_1 + h \rightarrow R_1 = R_2 - h$, sehingga

$$\frac{F}{\delta R} = -\frac{\alpha E h}{(1-\nu)} \frac{(R_2^2 - (R_2 - h)^2)}{R_2^2}$$

$$\frac{F}{\delta R} = -\frac{\alpha E h}{(1-\nu)} \frac{(R_2^2 - (R_2^2 + h^2 - 2R_2 h))}{R_2^2}$$

$$\frac{F}{\delta R} = -\frac{\alpha E h}{(1-\nu)} \frac{(R_2^2 - R_2^2 - h^2 + 2R_2 h)}{R_2^2}$$

$$\frac{F}{\delta R} = -\frac{\alpha E h}{(1-\nu)} \frac{(2R_2 h - h^2)}{R_2^2} = -\frac{\alpha E h}{(1-\nu)} \frac{2R_2 h \left(1 - \frac{h}{2R_2}\right)}{R_2^2}$$

$$\frac{F}{\delta R} = -\left\{\frac{2\alpha}{(1-\nu)}\right\} \frac{E h^2}{R_2}$$

$$\frac{F}{\delta R} = -k(Hukum\ Hooke)$$

$$k = \left\{\frac{2\alpha}{(1-\nu)}\right\} \frac{E h^2}{R_2},$$

karena nilai dari α tidak diketahui, maka konstanta $\frac{2\alpha}{(1-\nu)}$ dapat diindikasikan dengan c, yang mana c merupakan sebuah konstanta.

$$k = c\frac{E h^2}{R_2}.$$

Dengan mengaitkan tekanan kritis pada kulit permukaan bola (*spherical shell*) (Timoshenko dan Gere, 1961), yaitu

$$p_{critical} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{E h^2}{R^2},$$

maka untuk nilai c yaitu $\frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}$, sehingga nilai kekakuan kapsid, yaitu,

$$k = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh^2}{R_2}.$$

Lampiran L. Persamaan tensor tegangan untuk kasus tegangan bidang

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan tensor tegangan untuk kasus tegangan bidang. Bermula dari keterkaitan antara tegangan dan regangan, yaitu

$$\sigma \sim e, \tag{L.1}$$

dan untuk pernyataan notasi tensor standar, dinyatakan sebagai

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = \{\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}\} e_{kl}$$

$$= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} e_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} e_{kl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} e_{kl}$$

$$= \alpha e_{kk}\delta_{ij} + \beta e_{ij} + \gamma e_{ji} \ ,$$

karena kasusnya *isotropic*, maka

$$\sigma_{ij} = \alpha e_{kk}\delta_{ij} + (\beta + \gamma) e_{ij} \ ,$$

dengan

$$\alpha = \lambda \text{ dan } \beta + \gamma = 2\mu \ ,$$

maka,

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij} \ ,$$

dengan

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ dan } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

sehingga,

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)}\, e_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{kk}\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big((1-2\nu)e_{ij} + \nu e_{kk}\delta_{ij}\Big),$$

dengan E merupakan unsur intrinsik modulus elastisitas cangkang virus dengan satuan gaya per satuan luas.

Komponen untuk σ_{xx}, σ_{yy} dan σ_{zz}, yaitu

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big((1-2\nu)e_{xx} + \nu\big(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}\big)\Big)$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big((1-\nu)e_{xx} + \nu\big(e_{yy} + e_{zz}\big)\Big),$$

dengan cara yang sama, maka

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big((1-\nu)e_{yy} + \nu(e_{xx} + e_{zz})\Big)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big((1-\nu)e_{zz} + \nu\big(e_{xx} + e_{yy}\big)\Big),$$

sehingga, untuk kasus tegangan bidang, yaitu $\sigma_{zz} = 0$, maka

$$0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big(e_{zz}(1-\nu) + \nu\big(e_{xx} + e_{yy}\big)\Big)$$

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{(1-\nu)}\big(e_{xx} + e_{yy}\big).$$

Substitusikan e_{zz} ke persamaan σ_{xx} dan σ_{yy}, maka didapatkan

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)e_{xx} + \nu\left(e_{yy} - \frac{\nu}{(1-\nu)}\left(e_{xx}+e_{yy}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)e_{xx} + \frac{\nu e_{yy}(1-\nu) - \nu^2\left(e_{xx}+e_{yy}\right)}{(1-\nu)}\right)$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{(1-\nu)^2 e_{xx} + \nu e_{yy}(1-\nu) - \nu^2\left(e_{xx}+e_{yy}\right)}{(1-\nu)}\right)$$

$$= \frac{E}{(1-\nu^2)(1-2\nu)}\left((1-2\nu)e_{xx} + \nu e_{yy}(1-2\nu)\right)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{xx} + \nu e_{yy}\right),$$

dan dengan cara yang sama untuk σ_{yy}, yaitu

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{yy} + \nu e_{xx}\right).$$

Sehingga untuk tesor notasi ini dapat dinyatakan sebagai,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{\alpha\beta}(1-\nu) + \nu\delta_{\alpha\beta}e_{\gamma\gamma}\right),$$

dengan mengaitkan persamaan ini terhadap kulit bola, yaitu

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{\theta\theta}(1-\nu) + \nu(e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi})\right),$$

dengan tidak mengaitkan e_{RR}, kenapa tidak mengaitkannya ? karena tujuannya ialah fokus berkaitan dengan ketahanan pada kulit virus, intinya ialah mencari ketahanan atau nilai tensor tegangan komponen lateral yang terdiri dari θ dan ϕ yang merupakan peran utama pada interaksi antar partikel kapsomer jika itu cangkang kapsid, dan interaksi antar partikel lipid jika itu merupakan cangkang lipid. Sama halnya dengan tensor tegangan komponen ϕ, yaitu

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{\phi\phi}(1-\nu) + \nu(e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi})\right),$$

dengan menggunakan pernyataan homogen pada tensor tegangan komponen lateral yang artinya,

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi},$$

maka didapatkan suatu persamaan, yaitu

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{\theta\theta}(1-\nu) + \nu(e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi})\right)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(e_{\phi\phi}(1-\nu) + \nu(e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi})\right)$$

$$0 = \frac{E}{(1-\nu^2)}(1-\nu)\left(e_{\theta\theta} - e_{\phi\phi}\right) + 0$$

$$0 = \left\{\frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}(1-\nu)\right\}\left(e_{\theta\theta} - e_{\phi\phi}\right)$$

$$0 = e_{\theta\theta} - e_{\phi\phi}$$

$$e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi}$$

Sehingga inilah alasan mengapa jika $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$, maka $e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi}$. Kemudian untuk nilai tensor tegangan komponen θ, menjadi

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu)} e_{\theta},$$

dengan $e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} = \frac{\delta R}{R}$ (Sadd, 2009), maka

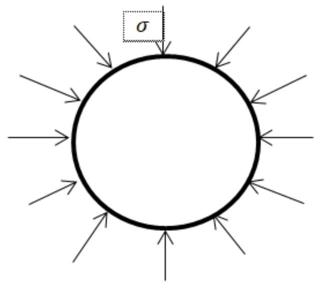
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \frac{E}{(1-\nu)} \frac{\delta R}{R},$$

sehingga untuk mencari tekanan radial eksternalnya, tinggal mensubstitusikan persamaan ini terhadap persamaan tekanan radial, yaitu

$$p = \frac{h}{R}\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi}\right) = \frac{2Eh}{(1-\nu)} \frac{\delta R}{R^2}.$$

Lampiran M. Penjabaran tensor tegangan berdasar fungsi tegangan Airy (ϕ)

Pada lampiran ini dibahas mengenai diperolehnya persamaan tensor tegangan berdasar fungsi tegangan Airy (ϕ). Untuk kasus *axisymmetric* kuantitas medan (tensor tegangan dan tensor regangan) *dependent* terhadap variabel radial dan *independent* terhadap koordinat angular (θ). Untuk gambaran skematis kasus *axisymmetric* ditunjukkan pada Gambar M, yaitu



Gambar M. Skematis kasus *axisymmetric* (Gambar dibuat dengan menggunakan Microsoft Word).

Fungsi tegangan kasus *axisymmetric* berdasarkan solusi persamaan Michell adalah

$$\phi = A_{01}r^2 + A_{02}r^2 \ln r + A_{03} \ln r,$$

dengan tensor tegangan radial, yaitu

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(2A_{01}r + 2A_{02}r \ln r + A_{02}r + A_{03}\frac{1}{r}\right)$$

$$= 2A_{01} + 2A_{02} \ln r + A_{02} + \frac{A_{03}}{r^2}$$

$$= (2A_{01} + A_{02}) + \frac{A_{03}}{r^2} + 2A_{02} \ln r,$$

dengan

$$2A_{01} + A_{02} = b,$$

dan

$$A_{03} = a.$$

Tanpa pernyataan *natural log*, maka persamaan tensor tegangan komponen radial adalah

$$\sigma_{rr} = b + \frac{a}{r^2}.$$

Begitu pula dengan tensor tegangan komponen θ, yaitu

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2A_{01}r + 2A_{02}r\ln r + A_{02}R + A_{03}\frac{1}{r}\right)$$

$$= 2A_{01} + 2A_{02}\ln r + 2A_{02} + A_{02} - \frac{A_{03}}{r^2}$$

$$= (2A_{01} + 3A_{02}) - \frac{A_{03}}{r^2} + 2A_{02}\ln r,$$

dengan

$$2A_{01} + 3A_{02} = b,$$

dan

$$A_{03} = a,$$

dan tanpa pernyataan *natural log*, maka

$$\sigma_{\theta\theta} = b - \frac{a}{r^2} = -\frac{a}{r^2} + b,$$

untuk tegangan geser sama dengan nol karena untuk menjaga cangkang virus bentuknya tetap *icosahedral*.

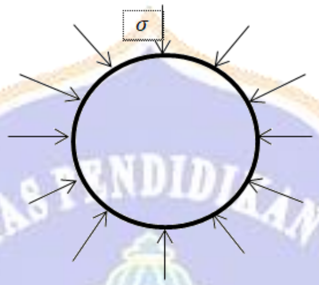
Lampiran N. Kondisi Batas (*Boundary Condition)*

Pada lampiran ini dibahas mengenai persamaan konstanta a dan b. Untuk menentukan nilai konstanta a dan b dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$\sigma_{rr}(R_2) = -\sigma \qquad \text{(N.1)}$$

$$\sigma_{rr}(R_1) = 0\,,$$

dan untuk gambaran kondisi batas pada lempengan ditampilkan pada Gambar N, yaitu



Gambar N. Lempengan 2D kapsid dalam beban eksternal homogen (*uniform external load)* (Gambar dibuat dengan menggunakan Microsoft Word).

Tegangan komponen radial solusi persamaan Michell, yaitu

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{a}{r^2} + b,$$

kemudian dengan mengaitkan dengan kondisi batas pada pers. (N.1), didapatkan suatu persamaan sebagai berikut:

$$\frac{a}{R_2^2} + b = -\sigma,$$

dan

$$\frac{a}{R_1^2} + b = 0.$$

Sehingga didapatkan suatu nilai untuk konstanta a dan b, yaitu

$$a = \sigma \frac{R_1^2\, R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)}\,,$$

dan

$$b = -\sigma \frac{R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Lampiran O. Mengapa tanpa pernyataan natural log ?

Pada lampiran ini dibahas mengenai persamaan tensor tegangan selesaian Michell tanpa pernyataan *natural log*. Jika menyelesiakan permasalahan ini dengan menggunakan pernyataan *natural log*, maka perhitungannya akan seperti berikut,

$$\frac{a}{R_2^2} + b + c \ln R_2 = -\sigma \qquad \text{(O.1)}$$

$$\frac{a}{R_1^2} + b + c \ln R_1 = 0,$$

eleminasikan variabel b,

$$a\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) + c(\ln R_2 - \ln R_1) = -\sigma$$

$$a\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) + c \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = -\sigma, \qquad \text{(O.2)}$$

kemudian eleminasikan variabel a, maka

$$b(R_2^2 - R_1^2) + c(R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1) = -\sigma R_2^2$$

$$c = \frac{-\sigma R_2^2 - b(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}, \qquad \text{(O.3)}$$

substitusikan persamaan (O.3) ke persamaan (O.2),

$$a\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_1^2}\right)-\left(\frac{\sigma R_2^2+b(R_2^2-R_1^2)}{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}\right)(\ln R_2-\ln R_1)=-\sigma$$

$$a\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_1^2}\right)+\frac{b(R_2^2-R_1^2)}{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}(\ln R_1-\ln R_2)$$

$$=-\sigma+\frac{\sigma R_2^2}{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}(\ln R_2-\ln R_1)$$

$$a\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_1^2}\right)+\frac{b(R_2^2-R_1^2)}{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}(\ln R_1-\ln R_2)=\frac{-\sigma(R_2^2-R_1^2)\ln R_1}{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}$$

$$-a\left(\frac{(R_2^2-R_1^2)}{R_2^2R_1^2}\right)+\frac{b(R_2^2-R_1^2)(\ln R_1-\ln R_2)}{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}=\frac{-\sigma(R_2^2-R_1^2)\ln R_1}{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}$$

$$-\frac{a}{R_2^2R_1^2}(R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1)+b(\ln R_1-\ln R_2)=-\sigma\ln R_1,$$

setelahnya persamaan ini dibagi dengan $(\ln R_1 \ln R_2)$, sehingga didapatkan

$$a\left(\frac{1}{R_2^2\ln R_2}-\frac{1}{R_1^2\ln R_1}\right)+b\left(\frac{1}{\ln R_2}-\frac{1}{\ln R_1}\right)=-\frac{\sigma}{\ln R_2}. \tag{O.4}$$

Kembali pada persamaan O.1, untuk kali ini dengan mengeleminasikan variabel c, maka akan didapatkan suatu persamaan, sebagai berikut

$$\frac{a}{R_2^2\ln R_2}+\frac{b}{\ln R_2}+c=-\frac{\sigma}{\ln R_2}$$

$$\frac{a}{R_1^2\ln R_1}+\frac{b}{\ln R_1}+c=0$$

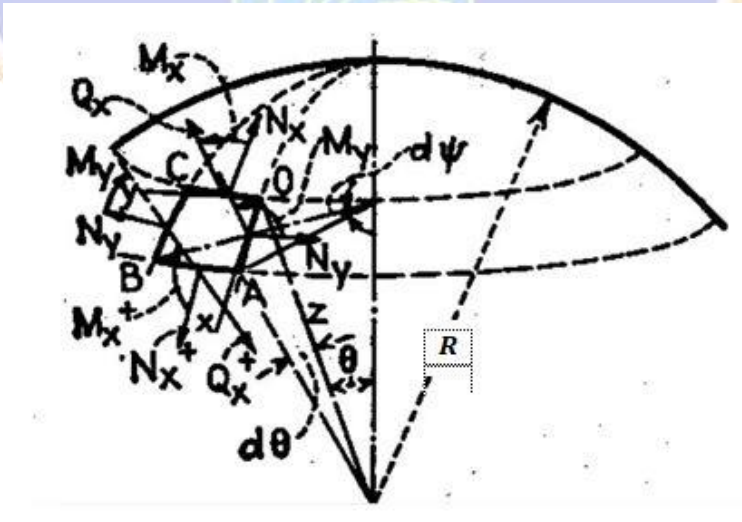
$$\overline{\hspace{8cm}}\quad -$$

$$a\left(\frac{1}{R_2^2\ln R_2}-\frac{1}{R_1^2\ln R_1}\right)+b\left(\frac{1}{\ln R_2}-\frac{1}{\ln R_1}\right)=-\frac{\sigma}{\ln R_2}, \tag{O.5}$$

sehingga dari kedua pers. (O.4) dan (O.5) saling meniadakan, inilah alasan mengapa diperlukan untuk mengabaikan atau tidak menggunakan pernyataan *natural log* dalam pernyataan tensor tegangan untuk kasus ini.

Lampiran P. *Buckling* pada kulit bola tipis

Pada lampiran ini dibahas mengenai persamaan *buckling* pada kulit bola tipis. Suatu kulit bola dalam suatu pengaruh tekanan eksternal yang homogen dari pembahasan sebelumnya dengan persamaan $p = \frac{h}{R}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi})$, kemudian ketika tekanan radial eksternal tersebut ditingkatkan pada kulit bola, maka bentuk bola yang mana dari bentuk awalnya yaitu bentuk seimbangnya, akan menjadi tidak stabil, dan mengakibatkan terjadinya *buckling* pada kulit bola.



Gambar P.1 Skematis elemen OABC pada permukaan bola (Sumber : Timoshenko dan Gere, 1961)

Keterkaitan antara tekanan radial dengan tegangan lateral pada kulit bola, yaitu

$$\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi} = 2\sigma_T^{3D} = \frac{pR}{h}$$

$$\sigma_T^{3D} = \frac{pR}{2h}. \tag{P.1}$$

Kemudian untuk nilai N_x dan N_y karena adanya suatu gaya tekan homogen sebesar $\frac{pR}{2}$, maka

$$N_x = -\frac{pR}{2} + N_x{}' \text{ dan } N_y = -\frac{pR}{2} + N_y' \,. \tag{P.2}$$

Persamaan kesetimbangan pada elemen OABC (seperti yang ditampilkan pada Gambar P.1), yaitu

$$\frac{dN_x}{d\theta} + \left(N_x - N_y\right)\cot\theta - Q_x + N_y\left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}\right) - Q_x\left(\frac{1}{R}\frac{d^2w}{d\theta^2} + \frac{w}{R}\right) = 0 \tag{P.3}$$

$$\frac{dQ_x}{d\theta} + Q_x\cot\theta + N_x + N_y + pR + N_x\left(\frac{1}{R}\frac{d^2w}{d\theta^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{d\theta}\right) + N_y\left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}\right)\cot\theta = 0 \tag{P.4}$$

$$\frac{dM_x}{d\theta} + \left(M_x - M_y\right)\cot\theta - Q_xR + M_y\left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}\right) = 0. \tag{P.5}$$

Sehingga dengan mensubstitusikan pers. (P.2) ke persamaan kesetimbangan elemen OABC (P.3), maka didapatkan suatu persamaan, yaitu

$$\frac{d}{d\theta}\left(N_x' - \frac{pR}{2}\right) + \left(N_x' - \frac{pR}{2} - N_y' + \frac{pR}{2}\right)\cot\theta - Q_x + \left(N_y' - \frac{pR}{2}\right)\left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}\right)$$
$$- Q_x\left(\frac{1}{R}\frac{d^2w}{d\theta^2} + \frac{w}{R}\right) = 0,$$

dengan mengabaikan pernyataan $N_y'\left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}\right) - Q_x\left(\frac{1}{R}\frac{d^2w}{d\theta^2} + \frac{w}{R}\right)$, karena hasil perkalian antara N_x', N_y' dan Q_x dengan turunan (*derivatives*) u, v dan w sangat kecil, sehingga didapatkan

$$\frac{dN_x{}'}{d\theta} + \left(N_x' - N_y'\right)\cot\theta - Q_x - \frac{pR}{2}\left(\frac{u}{R} + \frac{dw}{Rd\theta}\right) = 0,$$

dan dengan cara yang sama terhadap persamaan (P.4), maka

$$\frac{dQ_x}{d\theta} + Q_x\cot\theta + N_x' + N_y' + pR\left(\frac{1}{R}\frac{du}{d\theta} + \frac{u}{R}\cot\theta - \frac{2w}{R}\right)$$
$$- \frac{pR}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{du}{d\theta} + \frac{1}{R}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right) - \frac{pR}{2}\cot\theta\left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}\right) = 0,$$

dan untuk persamaan (P.5) dengan mengabaikan pernyataan hasil perkalian antara momen M_y dengan $\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}$, maka

$$\frac{dM_x}{d\theta} + \left(M_x - M_y\right)\cot\theta - Q_xR = 0.$$

Sehingga persamaan dari *buckling* permukaan kulit terkompres, yaitu

$$\frac{dN_x{}'}{d\theta} + \left(N_x' - N_y'\right)\cot\theta - Q_x - \frac{pR}{2}\left(\frac{u}{R} + \frac{dw}{Rd\theta}\right) = 0 \qquad \text{(P.6)}$$

$$\frac{dQ_x}{d\theta} + Q_x \cot\theta + N_x' + N_y' + pR\left(\frac{1}{R}\frac{du}{d\theta} + \frac{u}{R}\cot\theta - \frac{2w}{R}\right) - \frac{pR}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{du}{d\theta} + \frac{1}{R}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right) \quad \text{(P.7)}$$

$$-\frac{pR}{2}\cot\theta\left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}\right) = 0$$

$$\frac{dM_x}{d\theta} + \left(M_x - M_y\right)\cot\theta - Q_x R = 0. \quad \text{(P.8)}$$

Dengan mengeleminasikan Q_x pada persamaan (P.8), yang mana

$$Q_x = \frac{1}{R}\left(\frac{dM_x}{d\theta} + \left(M_x - M_y\right)\cot\theta\right),$$

dan dengan persamaan,

$$N_x' = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R}\left(\frac{du}{d\theta} - w + \nu(u\cot\theta - w)\right)$$

$$N_y' = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R}\left(u\cot\theta - w + \nu\left(\frac{du}{d\theta} - \frac{w}{a}\right)\right), \quad \text{(P.9)}$$

dan persamaan momen, yaitu

$$M_x = -\frac{D}{R^2}\left(\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} + \nu\left(u + \frac{dw}{d\theta}\right)\cot\theta\right)$$

$$M_y = -\frac{D}{R^2}\left(\left(u + \frac{dw}{d\theta}\right)\cot\theta + \nu\left(\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2}\right)\right), \quad \text{(P.10)}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (P.10) ke Q_x, maka

$$Q_x = \frac{1}{R}\left(\frac{dM_x}{d\theta} + \left(M_x - M_y\right)\cot\theta\right)$$

$$= \frac{1}{R}\left\{\left(-\frac{D}{R^2}\right)\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} + \nu\left(u + \frac{dw}{d\theta}\right)\cot\theta\right) + \left(-\frac{D}{R^2}\right)(1-\nu)\left(\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} - \left(u + \frac{dw}{d\theta}\right)\cot\theta\right)\cot\theta\right)\right\}$$

$$= -\frac{D}{R^3}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta}\cot\theta - (\nu + \cot^2\theta)u + \frac{d^3w}{d\theta^3} + \frac{d^2w}{d\theta^2}\cot\theta - (\nu + \cot^2\theta)\frac{dw}{d\theta}\right]$$

$$Q_x = -\frac{D}{R^3}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta}\cot\theta - (\nu + \cot^2\theta)u + \frac{d^3w}{d\theta^3} + \frac{d^2w}{d\theta^2}\cot\theta - (\nu + \cot^2\theta)\frac{dw}{d\theta}\right],$$

kemudian dengan mensubstitusikan Q_x ke persamaan (P.6),

$$\frac{dN_x{}'}{d\theta} + \left(N_x' - N_y'\right)\cot\theta - \frac{1}{R}\left(\frac{dM_x}{d\theta} + \left(M_x - M_y\right)\cot\theta\right) - \frac{pR}{2}\left(\frac{u}{R} + \frac{dw}{Rd\theta}\right) = 0$$

$$\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} - (1+\nu)\frac{dw}{d\theta} + \nu\frac{du}{d\theta}\cot\theta - \nu u(1 + \cot^2\theta)\right]$$

$$+ \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\cot\theta\left[\frac{du}{d\theta} + (\nu - 1)u\cot\theta - \nu\frac{du}{d\theta}\right]$$

$$+ \frac{D}{R^2}\left[\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{d^3w}{d\theta^3} + \nu\frac{du}{d\theta}\cot\theta + \nu\frac{d^2w}{d\theta^2}\cot\theta - \nu u(1 + \cot^2\theta)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \nu\frac{dw}{d\theta}(1 + \cot^2\theta)\right\} + (1+\nu)\cot\theta\left\{\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} - u\cot\theta - \frac{dw}{d\theta}\cot\theta\right\}\right]$$

$$- \frac{pR}{2}\left[u + \frac{dw}{d\theta}\right] = 0,$$

kemudian persamaan ini dikalikan dengan $\frac{(1-\nu^2)}{Eh}$ dan dengan konstanta,

$$\eta = \frac{D(1-\nu^2)}{R^2Eh} = \frac{h^2}{12R^2} \tag{P.11}$$

$$\xi = \frac{pR(1-\nu^2)}{2eh},$$

(P.12)

sehingga persamaan ini menjadi,

$$(1+\eta)\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{du}{d\theta} - (\nu + \cot^2\theta)u\right) - (1+\nu)\frac{dw}{d\theta} + \eta\left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d^2w}{d\theta^2} - (\nu + \cot^2\theta)\frac{dw}{d\theta}\right) - \xi\left(u + \frac{dw}{d\theta}\right) = 0,$$

dan dengan menggunakan cara yang sama terhadap persamaan (P.7), maka

$$\frac{dQ_x}{d\theta} + Q_x \cot\theta + N_x' + N_y' + pR\left(\frac{1}{R}\frac{du}{d\theta} + \frac{u}{R}\cot\theta - \frac{2w}{R}\right) - \frac{pR}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{du}{d\theta} + \frac{1}{R}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)$$
$$-\frac{pR}{2}\cot\theta\left(\frac{u}{R} + \frac{1}{R}\frac{dw}{d\theta}\right) = 0,$$

$$-\frac{D}{R^2}\left[\frac{d^3u}{d\theta^3} + \frac{d^2u}{d\theta^2}\cot\theta - \frac{du}{d\theta}(1 + \nu + 2\cot^2\theta)\right.$$
$$+ 2u(1 + \cot^2\theta)\cot\theta + \frac{d^4w}{d\theta^4} + \frac{d^3w}{d\theta^3}\cot\theta - \frac{d^2w}{d\theta^2}(1 + \nu + 2\cot^2\theta)$$
$$\left.+ 2\cot\theta(1 + \cot^2\theta)\frac{dw}{d\theta}\right]$$
$$-\frac{D}{R^2}\cot\theta\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta}\cot\theta - (\nu + \cot^2\theta)u + \frac{d^3w}{d\theta^3} + \frac{d^2w}{d\theta^2}\cot\theta\right.$$
$$\left.- (\nu + \cot^2\theta)\frac{dw}{d\theta}\right] + \frac{Eh}{(1 - \nu^2)}(1 + \nu)\left[\frac{du}{d\theta} - 2w + u\cot\theta\right]$$
$$-\frac{pR}{2}\left[-u\cot\theta - \frac{du}{d\theta} + 4w + \frac{d^2w}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta}\cot\theta\right] = 0,$$

kemudian persamaan ini dikalikan dengan $\frac{(1-\nu^2)}{Eh}$ dan dengan konstanta (P.11) dan (P.12), sehingga didapatkan suatu persamaan berupa,

$$\eta\left(\frac{d^3u}{d\theta^3} + 2\cot\theta\frac{d^2u}{d\theta^2} - (1 + \nu + \cot^2\theta)\frac{du}{d\theta} + u(2 - \nu + \cot^2\theta)\cot\theta + \frac{d^4w}{d\theta^4} + 2\cot\theta\frac{d^3w}{d\theta^3}\right.$$
$$\left.- (1 + \nu + \cot^2\theta)\frac{d^2w}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta}(2 - \nu + \cot^2\theta)\cot\theta\right)$$
$$- (1 + \nu)\left(\frac{du}{d\theta} + u\cot\theta - 2w\right) + \xi\left(-u\cot\theta - \frac{du}{d\theta} + 4w + \frac{dw}{d\theta}\cot\theta + \frac{d^2w}{d\theta^2}\right)$$
$$= 0,$$

atau

$$(1+\nu)\left(\frac{du}{d\theta}+u\cot\theta-2w\right)$$
$$+\eta\left(-\frac{d^3u}{d\theta^3}-2\cot\theta\frac{d^2u}{d\theta^2}+(1+\nu+\cot^2\theta)\frac{du}{d\theta}\right.$$
$$-u(2-\nu+\cot^2\theta)\cot\theta-\frac{d^4w}{d\theta^4}-2\cot\theta\frac{d^3w}{d\theta^3}$$
$$\left.+(1+\nu+\cot^2\theta)\frac{d^2w}{d\theta^2}-\frac{dw}{d\theta}(2-\nu+\cot^2\theta)\cot\theta\right)$$
$$-\xi\left(-u\cot\theta-\frac{du}{d\theta}+4w+\frac{dw}{d\theta}\cot\theta+\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)=0.$$

Sehingga didapatkan dua persamaan, yaitu

$$(1+\eta)\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{du}{d\theta}-(\nu+\cot^2\theta)u\right)-(1+\nu)\frac{dw}{d\theta}$$
$$+\eta\left(\frac{d^2w}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d^2w}{d\theta^2}-(\nu+\cot^2\theta)\frac{dw}{d\theta}\right)-\xi\left(u+\frac{dw}{d\theta}\right)=0, \quad \text{(P.13)}$$

$$\eta\left(\frac{d^3u}{d\theta^3}+2\cot\theta\frac{d^2u}{d\theta^2}-(1+\nu+\cot^2\theta)\frac{du}{d\theta}+u(2-\nu+\cot^2\theta)\cot\theta\right.$$
$$+\frac{d^4w}{d\theta^4}+2\cot\theta\frac{d^3w}{d\theta^3}-(1+\nu+\cot^2\theta)\frac{d^2w}{d\theta^2}$$
$$\left.+\frac{dw}{d\theta}(2-\nu+\cot^2\theta)\cot\theta\right)$$
$$-(1+\nu)\left(\frac{du}{d\theta}+u\cot\theta-2w\right)$$
$$+\xi\left(-u\cot\theta-\frac{du}{d\theta}+4w+\frac{dw}{d\theta}\cot\theta+\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)=0, \quad \text{(P.14)}$$

dengan,

$$u=\frac{d\psi}{d\theta}, \quad \text{(P.15)}$$

sehingga pada pers. (P.13) dan (P.14) menjadi

$$
\begin{aligned}
&(1+\eta)\left(\frac{d^3\psi}{d\theta^3}+\cot\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2}-(\nu+\cot^2\theta)\frac{d\psi}{d\theta}\right)-(1+\nu)\frac{dw}{d\theta} \\
&\quad+\eta\left(\frac{d^3w}{d\theta^3}+\cot\theta\frac{d^2w}{d\theta^2}-(\nu+\cot^2\theta)\frac{dw}{d\theta}\right) \\
&\quad-\xi\left(\frac{d\psi}{d\theta}+\frac{dw}{d\theta}\right)=0,
\end{aligned}
\tag{P.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&\eta\left(\frac{d^4\psi}{d\theta^4}+2\cot\theta\frac{d^3\psi}{d\theta^3}-(1+\nu+\cot^2\theta)\frac{d^2\psi}{d\theta^2}\right. \\
&\quad+\frac{d\psi}{d\theta}(2-\nu+\cot^2\theta)\cot\theta+\frac{d^4w}{d\theta^4} \\
&\quad+2\cot\theta\frac{d^3w}{d\theta^3}-(1+\nu+\cot^2\theta)\frac{d^2w}{d\theta^2} \\
&\quad\left.+\frac{dw}{d\theta}(2-\nu+\cot^2\theta)\cot\theta\right) \\
&\quad-(1+\nu)\left(\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\frac{d\psi}{d\theta}\cot\theta-2w\right) \\
&\quad+\xi\left(-\frac{d\psi}{d\theta}\cot\theta-\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+4w\right. \\
&\quad\left.+\frac{dw}{d\theta}\cot\theta+\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)=0,
\end{aligned}
\tag{P.17}
$$

dan dengan menggunakan H sebagai sebuah operator,

$$H=\frac{d^2}{d\theta^2}(\dots)+\frac{d}{d\theta}(\dots)\cot\theta+2(\dots), \tag{P.18}$$

dengan mengaitkan persamaan operator H (P.18) ke persamaan pertama (P.16), maka

$$\frac{d}{d\theta}[H(\psi)+\eta H(w)-(1+\nu)(\psi+w)-\eta(1+\nu)w-\xi(\psi+w)]=0,$$

sehingga,

$$H(\psi)+\eta H(w)-(1+\nu)(\psi+w)-\xi(\psi+w)=0, \qquad \text{(P.19)}$$

dan dengan hal yang sama terhadap persamaan yang kedua (P.17), yaitu

$$\eta\left(\frac{d^4\psi}{d\theta^4}+2\cot\theta\frac{d^3\psi}{d\theta^3}-(1+\nu+\cot^2\theta)\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\frac{d\psi}{d\theta}(2-\nu+\cot^2\theta)\cot\theta+\frac{d^4w}{d\theta^4}\right.$$
$$\left.+2\cot\theta\frac{d^3w}{d\theta^3}-(1+\nu+\cot^2\theta)\frac{d^2w}{d\theta^2}+\frac{dw}{d\theta}(2-\nu+\cot^2\theta)\cot\theta\right)$$
$$-(1+\nu)\left(\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\frac{d\psi}{d\theta}\cot\theta-2w\right)$$
$$+\xi\left(-\frac{d\psi}{d\theta}\cot\theta-\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+4w+\frac{dw}{d\theta}\cot\theta+\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)=0,$$

dan dengan persamaan (P.18), maka didapatkan

$$\eta HH(\psi+w)-(1+\nu)H(\psi)-\eta(3+\nu)H(w)+2(1+\nu)(\psi+w) \qquad \text{(P.20)}$$
$$+\xi\big(-H(\psi)+H(w)+2(\psi+w)\big)=0,$$

kemudian mengaitkan kedua persamaan dengan polinomial Legendre, yaitu

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2(2n-1)!!}{2^n n!}\left\{\cos n\theta+\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\theta+\frac{3}{2}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta+\cdots\right\}, \qquad \text{(P.21)}$$

fungsi ini memenuhi persamaan,

$$\frac{d^2P_n}{d\theta^2}+\frac{dP_n}{d\theta}\cot\theta+n(n+1)P_n=0$$
$$\frac{d^2P_n}{d\theta^2}+\frac{dP_n}{d\theta}\cot\theta=-n(n+1)P_n. \qquad \text{(P.22)}$$

Sehingga didapatkan suatu persamaan, yaitu

$$H(P_n) = -\lambda_n P_n$$

$$\lambda_n = n(n+1) - 2 \quad \text{(P.23)}$$

$$HH(P_n) = \lambda_n^2 P_n,$$

dengan,

$$H(P_n) = \frac{d^2}{d\theta^2}(P_n) + \frac{d}{d\theta}(P_n)\cot\theta + 2(P_n)$$

$$= -n(n+1)P_n + 2P_n = -\lambda_n P_n\,,$$

dengan $n(n+1) - 2 = \lambda_n$ dan untuk pembuktian persamaan $HH(P_n) = \lambda_n^2 P_n$, yaitu

$$HH(P_n) = H(-\lambda_n P_n)$$

$$= -\lambda_n\left(\frac{d^2}{d\theta^2}(P_n) + \frac{d}{d\theta}(P_n)\cot\theta + 2(P_n)\right)$$

$$= -\lambda_n(-n(n+1\,)P_n + 2P_n)$$

$$-\lambda_n(-\lambda_n P_n)$$

$$= \lambda_n^2 P_n.$$

Setelah itu menyatakan ψ dan w sebagai,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n, \quad \text{(P.24)}$$

pers. (P.24) disubstitusikan ke pers. (P.19) dan pers. (P.20), dan juga mengaitkan hal ini dengan pers. (P.23), sehingga didapatkan suatu persamaan, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{A_n[\lambda_n + (1+\nu) + \xi] + B_n[\eta\lambda_n + (1+\nu) + \xi]\}P_n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{A_n[\eta\lambda_n^2 + (1+\nu)(\lambda_n + 2) + \xi(\lambda_n + 2)] + B_n[\eta\lambda_n^2 + (3+\nu)(\lambda_n\eta) + 2(1+\nu) - \xi(\lambda_n - 2)]\}P_n = 0,$$

untuk dua persamaan *homogeneous*, yaitu sebagai berikut

$$A_n[\lambda_n + (1+\nu) + \xi] + B_n[\eta\lambda_n + (1+\nu) + \xi] = 0$$

$$A_n[\eta\lambda_n^2 + (1+\nu)(\lambda_n + 2) + \xi(\lambda_n + 2)] + B_n[\eta\lambda_n^2 + (3+\nu)(\lambda_n\eta) + 2(1+\nu) - \xi(\lambda_n - 2)] = 0,$$

kemudian mengubah kedalam bentuk matriks,

$$\begin{pmatrix} [\lambda_n + (1+\nu) + \xi] & [\eta\lambda_n + (1+\nu) + \xi] \\ [\eta\lambda_n^2 + (1+\nu)(\lambda_n + 2) + \xi(\lambda_n + 2)] & [\eta\lambda_n^2 + (3+\nu)(\lambda_n\eta) + 2(1+\nu) - \xi(\lambda_n - 2)] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = 0,$$

dengan menggunakan determinan, didapatkan

$$[\lambda_n + (1+\nu) + \xi][\eta\lambda_n^2 + (3+\nu)(\lambda_n\eta) + 2(1+\nu) - \xi(\lambda_n - 2)] \\ - [\eta\lambda_n + (1+\nu) + \xi][\eta\lambda_n^2 + (1+\nu)(\lambda_n + 2) + \xi(\lambda_n + 2)] = 0.$$

Sehingga persamaan yang digunakan untuk mengkalkulasikan nilai tekanan kritis, yaitu

$$(1-\nu^2)\lambda_n + \eta\lambda_n[\lambda_n^2 + 2\lambda_n + (1+\nu)^2] - \xi\lambda_n[\lambda_n + (1+3\nu)] = 0$$

$$\xi = \frac{(1-\nu^2) + \eta[\lambda_n^2 + 2\lambda_n + (1+\nu)^2]}{[\lambda_n + (1+3\nu)]},$$

$$\frac{d\xi}{d\lambda_n} = 0$$

$$\lambda_n^2 + 2(1+3\nu)\lambda_n - \frac{1-\nu^2}{\eta} = 0$$

$$\lambda_n = \frac{-2(1+3\nu) \pm \sqrt{4(1+3\nu)^2 + 4\left(\frac{1-\nu^2}{\eta}\right)}}{2}$$

$$\lambda_n = -2(1+3\nu) + \sqrt{\left(\frac{1-\nu^2}{\eta}\right)\left[\frac{(1+3\nu)^2}{(1-\nu^2)}\eta + 1\right]}$$

$$\lambda_n = 2(1+3\nu) + \sqrt{\frac{1-\nu^2}{\eta}}$$

$$\xi_{minimum} = 2\sqrt{(1-\nu^2)\eta} - 6\nu\eta$$

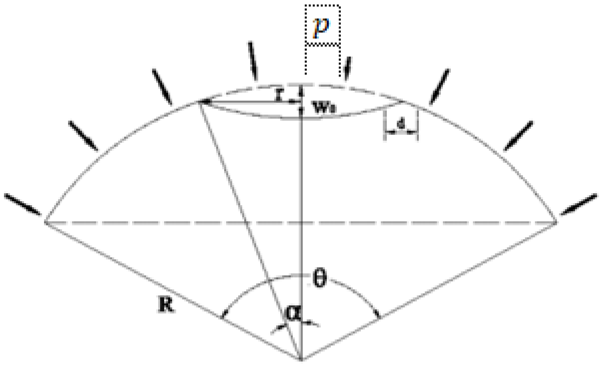
$$p_{kritis} = \frac{\xi_{minimum}}{R(1-\nu^2)}(2Eh) = \frac{1}{(1-\nu^2)}\frac{2Eh}{R}\left(\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\frac{h}{R} - \frac{\nu h^2}{2R^2}\right),$$

dengan mengabaikan pernyataan kedua, maka didapatkan

$$p_{kritis} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{Eh^2}{R^2}, \qquad \text{(P.25)}$$

dan persamaan tegangan kritis pada kulit bola, yaitu

$$\sigma_T^{3D} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{Eh}{R}. \qquad \text{(P.26)}$$



Gambar P.2 Fenomena tekuk/*Buckling* pada kulit bola (Sumber : Khakina, 2013).

Persamaan nilai tekanan kritis pada kulit bola tipis (*thin spherical shell)* (Timoshenko, dan Gere, 1961), yaitu

$$p_{critical} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{Eh^2}{R^2}.$$

Pada Gambar P.2 keterkaitan radius kulit bola dengan radius wilayah *buckling* (r),yaitu

$$r = R\sin\alpha \approx R\alpha.$$

Energi regangan deformasi dari kulit bola terdiri dari dua bagian, yaitu energi regangan selama bengkokan (*bending energy*) dan energi ulur (*stretching energy*), yang dinyatakan sebagai berikut:

$$E_{bending} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{w_o^2}{d^2}\right)$$

$$E_{stretching} = \frac{Et}{2(1-\nu)}\frac{w_o^2}{R^2}\ d^2.$$

Keterkaitan antara energi bengkok dan ulur, yaitu ketika energi bengkok mengalami suatu peningkatan maka energi pada peran ulur mengalami suatu penurunan karena hal ini merupakan peran dari skala wilayah bengkok yang dinyatakan dalam variabel d. Kemudian nilai dari d ini didapatkan dari mendiferensialkan energi total terhadap d, yaitu

$$U_{tot} \approx \frac{Et^2}{R}\left(\frac{w_o^2 hR}{d^2} + \frac{w_o^2 d^2}{Rh}\right) = \frac{Eh^2}{R}\left(\frac{Rh}{d^2} + \frac{d^2}{Rh}\right) w_o^2$$

$$\frac{\delta U_{tot}}{\delta d} = 0$$

$$-\frac{2Rh}{d^3} + \frac{2d}{Rh} \approx 0$$

$$d \approx \sqrt{Rh}.$$

Sehingga persamaan d yang merupakan skala wilayah bengkok pada kulit bola adalah $d \approx \sqrt{Rh}$. Substitusikan persamaan d ke persamaan $U_{tot} \approx \frac{Eh^2}{R}\left(\frac{Rh}{d^2} + \frac{d^2}{Rh}\right) w_o^2$, sehingga didapatkan suatu persamaan, yaitu

$$U_{tot} \approx \frac{Eh^2}{R}(1+1) w_o^2$$

$$U_{tot} \approx 2\frac{Eh^2}{R} w_o^2,$$

sehingga konstanta proporsionalitas pada persamaan $U_{tot} \approx 2\frac{Eh^2}{R} w_o^2$ adalah konstanta elastisitas pada kulit bola, yaitu

$$k \approx \frac{Eh^2}{R}.$$

dengan satuan E adalah gaya per satuan luas.