BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 melalui tulisannya tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa. Masalah yang dimaksud adalah membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia masing-masing tepat sekali dan kembali ke tempat semula. Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler memisalkan daratan dengan titik dan jembatan dinyatakan dengan garis atau sisi. Melalui pembuktian Euler menyimpulkan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan itu masing-masing sekali dan kembali lagi ke tempat semula. Pemecahan masalah jembatan Konisberg ini kemudian menjadi sejarah lahirnya teori graf. (Riskawati *et al.*, 2019).

Penelitian mengenai teori graf khususnya pelabelan graf terus mengalami perkembangan. Survei terkini mengenai pelabelan graf yang telah dilakukan terdapat pada tulisan *"A Dynamic Survey of Graph Labeling"* oleh Gallian (2019). Chartrand *et al.* (1988) memperkenalkan pelabelan-k tak teratur pada graf dan konsep kekuatan ketidakteraturan pada graf. Aigner dan Triesch (1990) membuktikan bahwa jika G adalah graf terhubung berorder n maka $s(G) \leq n-1$, dan $s(G) \leq n+1$ untuk graf lainnya. Selanjutnya Nierhoff (2000) menunjukkan bahwa untuk seluruh graf berbeda dengan kekuatan ketidakteraturan terbatas, $s(G) \leq n-1$. Przybylo (2008) membuktikan bahwa untuk graf regular G maka $s(G) \leq 16\frac{n}{d}+6$. Kawolski *et al.* (2011) menunjukkan bahwa $s(G) \leq 6\frac{n}{\delta}+6$, dimana δ merupakan derajat minimum pada graf G. Beberapa penelitian lainnya terdapat pada Bohman dan Kravitz (2004), Freze *et al.* (2002), Anholcer dan Palmer (2012), Majersky dan Przybylo (2014) yang membahas mengenai kekuatan ketidakteraturan dari beberapa graf tertentu. Aplikasi pelabelan graf telah dimanfaatkan dalam berbagai bidang keilmuan seperti kimia, teknik sipil, industri, jaringan komunikasi, astronomi, elektronika, sistem keamanan, psikologi sosial, pemrograman dan lain sebagainya. Berbagai variasi dari pelabelan-k tak teratur telah berkembang dan dikaji, salah satunya adalah pelabelan-k tak teratur modular dan diperkenalkan konsep kekuatan ketidakteraturan modular.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf berorder n dengan tidak memuat komponen berorder dua. Sebuah pelabelan-k sisi $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots k\}$ merupakan pelabelan-k tak teratur modular pada G jika terdapat fungsi bijektif $w: V(G) \rightarrow Z_n$, dimana Z_n merupakan grup penjumlahan dari bilangan bulat modulo n dan bobot modular dari titik x didefinisikan oleh

$$w(x) = \sum f(xy)$$

untuk semua titik y yang bertetangga dengan titik x. Nilai kekuatan ketidakteraturan modular dari G dinotasikan dengan $ms(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan-k tak teratur modular. Jika tidak terdapat nilai k sehingga terpenuhi pelabelan-k tak teratur modularnya maka didefinisikan $ms(G) = \infty$. (Bača *et al.*, 2020).

Bača *et al.* (2020) menyatakan sebuah masalah terbuka untuk menentukan nilai kekuatan ketidakteraturan modular dari graf lengkap K_n untuk $n \geq 3$. Beberapa peneliti telah menuliskan hasil penelitian mengenai kekuatan ketidakteraturan modular dari beberapa graf dan masalah terbuka ini masih belum terjawab. Dengan demikian, rencana penelitian ini akan bertujuan untuk melakukan kajian terhadap kekuatan ketidakteraturan modular khususnya untuk menjawab masalah terbuka tersebut.

Penelitian ini kemudian diperluas untuk mencari kekuatan ketidakteraturan modular dari beberapa kelompok graf bipartit lengkap. Bača *et al.* (2020) telah membuktikan kekuatan ketidakteraturan modular salah satu jenis graf bipartit lengkap yaitu untuk graf bintang $K_{1,n}$. Sehingga rencana penelitian ini akan bertujuan untuk melakukan kajian terhadap kekuatan ketidakteraturan modular untuk beberapa kelompok pada graf bipartit lengkap yang belum dikaji, yaitu: graf bipartit lengkap $K_{n,n}, K_{n,n+1}$, dan $K_{n,n+2}$ untuk $n \geq 2$. Graf lengkap K_n untuk $n \geq 3$ dan graf bipartit lengkap $K_{n,n}, K_{n,n+1}$, dan $K_{n,n+2}$ untuk $n \geq 2$ termasuk ke dalam kelompok graf padat. Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, penulis merumuskan penelitian dengan judul **"Kekuatan Ketidakteraturan Modular Beberapa Graf Padat"**

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah bagaimana nilai kekuatan ketidakteraturan modular beberapa graf padat, yaitu: graf lengkap K_n untuk $n \geq 3$ dan graf bipartit lengkap $K_{n,n}, K_{n,n+1}$, dan $K_{n,n+2}$ untuk $n \geq 2$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diajukan, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji dan menentukan nilai kekuatan ketidakteraturan modular beberapa graf padat, yaitu: graf lengkap K_n untuk $n \geq 3$ dan graf bipartit lengkap $K_{n,n}, K_{n,n+1}$, dan $K_{n,n+2}$ untuk $n \geq 2$.

1.4 Manfaat Penelitian

1.4.1 Manfaat Teoretis

Manfaat teoretis yang diharapkan oleh penulis dalam penelitian ini adalah dapat memberikan tambahan pemikiran dan menambah ilmu pengetahuan pada bidang matematika khususnya pada pelabelan graf, sekaligus menjawab *open problem 1* yang terdapat pada jurnal dengan judul "*Modular Irregularity Strength of Graphs*" yang disusun oleh Bača *et al.* (2020) yang dipublikasikan pada *Electronic Journal of Graph Theory and Applications.*

1.4.2 Manfaat Praktis

1. Bagi Peneliti

   Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan terkait pelabelan graf khususnya kekuatan ketidakteraturan modular dan mendapatkan pengalaman dalam melaksanakan penelitian dan menyusun karya ilmiah, serta dapat mengaplikasikan ilmu matematika yang telah dipelajari

2. Bagi Pembaca

   Menambah wawasan dan referensi pembaca mengenai pelabelan graf khususnya mengenai kekuatan ketidakteraturan modular serta dapat dijadikan acuan dalam melaksanakan penelitian yang sejenis