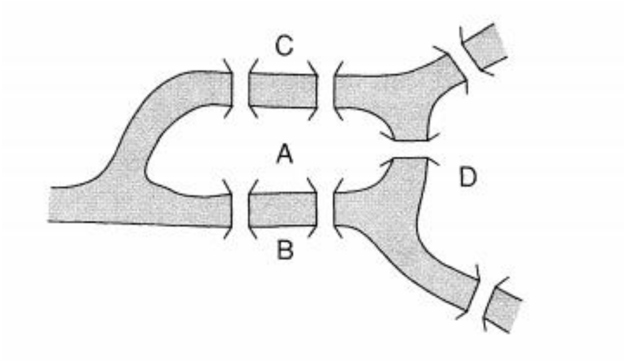
BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Tazira dalam (Saidatuz, 2016) teori *graf* adalah salah satu cabang ilmu matematika yang secara khusus merupakan suatu kajian dalam matematika diskrit. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit serta hubungan dari objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkembangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berjudul *Solution problematis ad geometrian situs pertinensi* tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa. Masalah yang dimaksud ialah membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Dalam memecahkan masalah tersebut, Euler memisalkan daratan dengan titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan garis atau sisi (*edge*). Melalui pembuktiannya, Euler menyimpulkan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan itu, masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Akhirnya, kisah jembatan Konisberg ini menjadi sejarah lahirnya teori graf (Hasmawati, 2015).



Gambar 1.1 Ilustrasi Jembatan Konigsberg
Sumber : (Wilson, 1996)

Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu topik yang terus berkembang adalah pelabelan pada graf. *Pelabelan* pada suatu graf didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf ke suatu himpunan bilangan bulat tak negatif yang disebut *label*. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlácek (1963), Stewart (1966), kemudian Kotzig dan Rosa (1970) (Wallis, Baskoro, Miller, & Slamin, 2000). Pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, yakni dalam penyimpanan data komputer, pemancar frekuensi radio, desain sirkuit, dan desain jaringan. Selain itu, pelabelan graf juga diaplikasikan pada sektor kesehatan, contohnya dalam penggunaan *X-ray Crystallography*.

Salah satu jenis pelabelan yang terkenal adalah *pelabelan ajaib* yang diperkenalkan oleh Sedlácek pada 1963. Pelabelan tersebut dikatakan ajaib karena ketika bobot dari unsur-unsur graf dijumlahkan dengan aturan tertentu, maka akan menghasilkan suatu nilai tetap yang kemudian dikenal dengan sebutan konstanta ajaib. Berbagai variasi dari pelabelan ajaib telah banyak berkembang dan dikaji, salah satunya adalah pelabelan total sisi ajaib (Kang, Suh-Ryung, & Ji Yeon, 2015). Pelabelan total sisi ajaib adalah pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3 \dots, |V| + |E|\}$ sedemikian sehingga $f(u) + f(v) + f(uv) = k$ untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan k adalah suatu konstanta. Suatu pelabelan disebut *pelabelan total ajaib berurutan sisi-b* (b-*edge consecutive magic total labeling*) atau disingkat dengan b-ECMTL apabila bobot dari sisi graf merupakan himpunan bilangan berurutan $\{b + 1, b + 2, \dots b + |E|\}, 0 \leq b \leq n$. Suatu graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan total ajaib berurutan sisi-b disebut dengan *graf total ajaib berurutan sisi-b* (Sugeng & Miller, 2008).

Lebih lanjut, Sugeng dan Silaban menyatakan sebuah *conjecture* bahwa semua graf pohon memiliki pelabelan total ajaib berurutan sisi-b (Sugeng & Silaban, 2020). Beberapa kajian telah menjawab secara parsial *conjecture* tersebut, yakni: Sugeng dan Miller menentukan nilai b-ECMTL pada graf bintang berganda dan graf *caterpillar* (Sugeng & Miller, 2008), Rachmawati membuktikan pada graf lobster $L_n(2; r)$ dan $L_n(2; r, s)$ (Rachmawati, 2012), Wulandari membuktikan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan

$L_n(r, 0; 1, s)$ (Wulandari, 2012), Nurjana, dkk membuktikan pada graf lobster $L_n(2; r; t)$ dan $L_n(2; r, s; t)$ (Nurjana, Sudarsana, & Resnawati, 2017), serta Sugeng dan Silaban membuktikan nilai b-ECMTL pada *regular caterpillars*, *regular firecrackers*, *regular caterpillar-like trees*, *regular path-like trees*, dan *regular banana trees* (Sugeng & Silaban, 2020).

Berdasarkan hasil survei secara dinamis terkait pelabelan graf oleh Gallian yang mencangkup penelitian dari berbagai belahan dunia, didapatkan bahwa penelitian terkait pelabelan total ajaib berurutan sisi-b masih minim dilakukan. Lebih lanjut, *conjecture* yang dinyatakan oleh Sugeng dan Silaban masih belum terjawab sepenuhnya. Dengan demikian, rencana penelitian ini akan difokuskan untuk melakukan kajian terhadap pelabelan total ajaib berurutan sisi-b khususnya untuk menjawab secara parsial *conjecture* tersebut untuk jenis graf pohon lainnya yang belum dikaji, yaitu: graf pohon kelapa $CT(m, n)$, graf pohon pisang tak teratur $B(2; p, q)$ dengan $p \neq q$, graf pohon pisang teratur $B(n, r)$, dan graf lobster semi teratur $L_n(1, 2s\ ; 2, s)$. Berdasarkan pemaparan di atas, maka penulis tertarik untuk mengangkat suatu penelitian dengan judul **"Pelabelan Total Ajaib Berurutan Sisi**-b **pada Graf Pohon Tertentu"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang diangkat yaitu bagaimana pelabelan total ajaib berurutan sisi-b pada graf pohon kelapa $CT(m, n)$, graf pohon pisang tak teratur $B(2; p, q)$ dengan $p \neq q$, graf pohon pisang teratur $B(n, r)$, dan graf lobster semi teratur $L_n(1, 2s\ ; 2, s)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diajukan, maka tujuan dari penelitian ini ialah untuk mengkaji pelabelan total ajaib berurutan sisi-b pada graf pohon tertentu, yaitu: graf pohon kelapa $CT(m, n)$, graf pohon pisang tak teratur $B(2; p, q)$ dengan $p \neq q$, graf pohon pisang teratur $B(n, r)$, dan graf lobster semi teratur $L_n(1, 2s\ ; 2, s)$.

1.4 Manfaat Penelitian

1.4.1 Manfaat Teoritis

Adapun manfaat teoritis yang diharapkan oleh peneliti dalam melaksanakan penelitian ini yakni dapat memberikan sumbangsih pemikiran, menambah kasanah ilmu pengetahuan pada bidang matematika khususnya pada pelabelan graf, sekaligus menjawab secara parsial atas *conjecture* 1 yang terdapat pada jurnal dengan judul "*On b-Edge Consecutive Edge Labeling of Some Regular Trees*" yang disusun oleh Kiki. A Sugeng dan Denny R. Silaban serta dipublikasikan pada *Indonesian Journal of Combinatorics*.

1.4.2 Manfaat Praktis

a) Bagi Peneliti

Meningkatkan pemahaman dan pengetahuan terkait pelabelan graf khususnya pelabelan total ajaib berurutan sisi-b, mendapatkan pengalaman dalam melaksanakan penelitian dan menyusun karya ilmiah, serta dapat mengaplikasikan ilmu matematika yang telah dipelajari.

b) Bagi Pembaca

Menambah wawasan dan referensi pembaca mengenai pelabelan graf khususnya mengenai pelabelan total ajaib berurutan sisi-b serta dapat dijadikan acuan dalam melaksanakan penelitian yang sejenis.